

①

متغیر تصادفی $x_1, x_2, \dots, x_n$ را بتوانیم گوسی گزیده اگر pdf تمام آنها به صورت زیر باشد

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{m})^T K^{-1}(\underline{x} - \underline{m})\right\}}{(2\pi)^{n/2} |K|^{1/2}} \quad (1)$$

که در آن $\underline{x}$ و $\underline{m}$ بردارهای ستونی n تایی بوده و در زیر هستند.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}$$

و K ماتریس کد کوفت شده در زیر می باشد

$$K = \begin{bmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) & \dots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \dots & \dots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

از آنجا که $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i)$ است، پس K ماتریس متقارن است.

* تابع توزیع گوسی ρ متغیره را با توجه به کوفت

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{X,Y} \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho_{X,Y} \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad |K| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{X,Y}^2)$$

ماتریس وارانس کد کوفت شده

$$K^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{X,Y}^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{X,Y} \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho_{X,Y} \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

جدول مقادیر متقارن است

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{X,Y}^2)} (\underline{x} - \underline{m})^T \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{X,Y} \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho_{X,Y} \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} (\underline{x} - \underline{m}) \\ &= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{X,Y}^2)} \left[\sigma_2^2 (x - m_1) - \rho_{X,Y} \sigma_1 \sigma_2 (y - m_2) \right] \begin{bmatrix} x - m_1 \\ y - m_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{X,Y}^2)} \left[\sigma_2^2 (x - m_1)^2 - 2\rho_{X,Y} \sigma_1 \sigma_2 (x - m_1)(y - m_2) + \sigma_1^2 (y - m_2)^2 \right] \end{aligned}$$

(2)

(۲)

شماره :

بردار متغیر تصادفی (X, Y, Z) دارای توزیع نرمال گوسی
باید متغیرها و واریانس و کوفاریانس زیر را در نظر بگیریم.

$$K = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X, X) & \text{Cov}(X, Y) & \text{Cov}(X, Z) \\ \text{Cov}(Y, X) & \text{Cov}(Y, Y) & \text{Cov}(Y, Z) \\ \text{Cov}(Z, X) & \text{Cov}(Z, Y) & \text{Cov}(Z, Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

بردار متغیر تصادفی X, Y, Z را می توان نوشت:

صراحتاً: ۱- در این صورت داریم: ۱- اشتراک متغیر مستقل pdf را داریم
pdf مشترک
۲- استفاده از این واقعیت که pdf مشترک X, Y, Z نیز یک گوسی است
که دارای همان حجم و باید متغیرها، واریانس و کوفاریانس است.
بنابراین طبق روش ۲: pdf را داریم (X, Z) دارای واریانس و کوفاریانس

$$K = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X, X) & \text{Cov}(X, Z) \\ \text{Cov}(Z, X) & \text{Cov}(Z, Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

چنانچه اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیر تصادفی باشد $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ برای $i \neq j$
باید و دارای توزیع نرمال گوسی باشد، چنانچه متغیر تصادفی مستقل هستند.
و می توانیم که واریانس متغیر تصادفی را داریم:

$$K = \text{diag}[\text{VAR}(X_i)] = \text{diag}[\sigma_i^2] \quad K^{-1} = \text{diag}\left[\frac{1}{\sigma_i^2}\right]$$

$$(\underline{x} - \underline{m})^T K^{-1} (\underline{x} - \underline{m}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \right)^2$$

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\exp(-1/2 \sum_{i=1}^n [(x_i - m_i)/\sigma_i]^2)}{(2\pi)^{n/2} |K|^{1/2}} = \prod_{i=1}^n \frac{\exp(-1/2 [(x_i - m_i)/\sigma_i]^2)}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}$$

$$= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

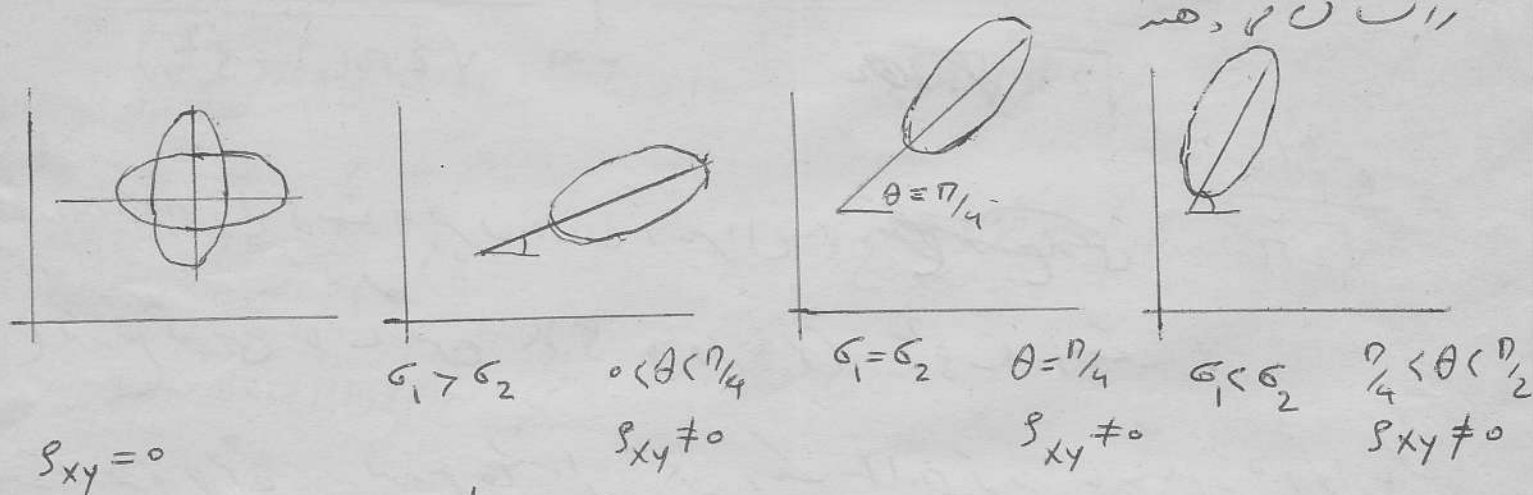
(۳)

رابطه (۲) در صفحه ۱ جذبه ما در درس ۲ سغیره را نشان می دهد.

شکل تابع توزیع کورس ۲ سغیره مستطی در زنگنه ای است که مرکز آن (m_1, m_2) میباشد و مقادیر ρ و σ_1 و σ_2 در شکل زنگنه را مشخص می کنند.

همه مقادیر n و y که برای آنها مقدار ρ و σ_1 و σ_2 را مشخص می کنند (level set) و یا کانتور تابع توزیع را بیان می کنند.

شکل ۶ زیر برای مقادیر مختلف ρ و σ_1 و σ_2 ، کانتور $\rho d\rho$ ثابت را نشان می دهد.



$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \right)$$

مقدار زاویه θ عبارت است از:

$$\theta = \pi/4 \text{ ، } \tan^{-1} \infty \text{ ، } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ ، } \theta = \pi/2 \text{ ، } \tan^{-1} 0 \text{ ، } \rho = 0$$

مثال: در حالت خاص رابطه (۲) وقتی $m_1 = m_2 = 0$ و $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ است. از روی توزیع نرمال که به صورت زیر در می آید. توزیع x و y را به اشتراک بگیرد.

$$f_{x,y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(x^2 - 2\rho xy + y^2)/2(1-\rho^2)}{1-\rho^2}}$$

که برای $x, y \in (-\infty, \infty)$

توزیع حاشیه x به اشتراک بگیرد $f_{x,y}(x,y)$ در y ثابت می آید.

$$f_x(x) = \frac{e^{-x^2/2(1-\rho^2)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2 - 2\rho xy)/2(1-\rho^2)} dy$$

با اضافه و کم کردن $\rho^2 x^2$ می‌توان درون انشمار را به صورت مربع کامل

در صراحت آورد. یعنی

$$y^2 - 2\rho xy + \rho^2 x^2 - \rho^2 x^2 = (y - \rho x)^2 - \rho^2 x^2$$

بنابراین:

$$f_{X(n)} = \frac{e^{-x^2/2(1-\rho^2)}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(y-\rho x)^2 - \rho^2 x^2]/2(1-\rho^2)} dy$$

$$= \frac{e^{-x^2/2(1-\rho^2)} \times e^{\rho^2 x^2/2(1-\rho^2)}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-[(y-\rho x)^2]/2(1-\rho^2)}}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} dy$$

$$= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

مقدار انشمار ρ است و چون درون انشمار ρ حذف شده

تبع توزیع گوسی با پارامتر ρx و واریانس $1-\rho^2$ است.

متوجه شدیم که توزیع حاشیه X یک $p.d.f$ گوسی با پارامتر ρx و واریانس $1-\rho^2$ است. به همین ترتیب توزیع حاشیه Y است.

تمرین: از درون توزیع تمام رابطه (۲) در صفحه (۱) $p.d.f$ شرطی

$f_{X|Y}(x|y)$ و $f_{Y|X}(y|x)$ را به دست آورید و نشان دهید

که $p.d.f$ X به شرط $Y=y$ یک گوسی است که دارای میانگین شرطی

$m_1 + \rho_{X,Y} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) (y - m_2)$ و واریانس شرطی $(1-\rho_{X,Y}^2) \sigma_1^2$ است.

مستقل از Y و $p_{X,Y} = 0$ است. توزیع شرطی X به شرط $Y=y$

همان توزیع حاشیه X می‌باشد. یعنی X و Y مستقل هستند.

نکته مهم: اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، $\rho_{XY} = 0$ است. (۵)
 و برعکس اگر $\rho_{XY} = 0$ باشد، لزوماً X و Y مستقل نیستند.
 تنها موردی که $\rho_{XY} = 0$ متغیرهای تصادفی X و Y را مستقل می‌کند، فقط موردی است که X و Y متغیرهای تصادفی گوسی باشند.

* این متغیر تصادفی: سوال: کدام توزیع در زیر توزیع Y است؟

صحیح: ~~توزیع~~ $Y \sim \text{NegBin}(r, p)$ $E[Y] = \frac{r}{p}$ ~~را در نظر بگیرید~~

$$Y = \sum_{i=1}^? Y_i$$

در مورد Y_i که ام گزیده صحیح است

A - $Y_i = 1$ این نشان ~~شده~~ ^{شده} است، یعنی $Y_i \sim \text{Ber}(p), i=1, \dots, r$

B - $Y_i =$ تعداد نشان ~~بر~~ ^{بر} آمدن i این سرنی (براز

شده (۱- i) این سرفقیست، یعنی $Y_i \sim \text{Geo}(p), i=1, \dots, r$

C - $Y_i =$ تعداد سرفقیست r در n ~~نشان~~ ^{نشان} است، یعنی

که در مقابل $P(Y_i=1)$ هستیم، $Y_i \sim \text{Bin}(n, p), i=1, \dots, r$

جواب: B

متحقق کنید که هر مورد زیر عدد r تابع است.

۱ - $P(Y=2 | Y=5)$

عدد

۳ - $P(X=2 | Y=y)$

تابع Y

۲ - $P(X=x | Y=5)$

تابع x

۴ - $P(X=x | Y=y)$

تابع x و y

از مدار زیر کدام صحیح و کدام غلط است

صحیح

$$1 - \sum_x P(X=x | Y=5) = 1$$

غلط

$$2 - \sum_y P(X=2 | Y=y) = 1$$

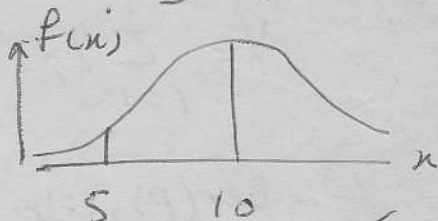
صحیح

$$3 - \sum_x \left(\sum_y P(X=x | Y=y) P(Y=y) \right) = 1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{P(X=x)}$

۱. مثال ۲: فرض کنید X زمان رسیدن یک قطار به ایستگاه است.

نکته: $f(x) > 0$ صحیح است، اما $f(x)$ نمی تواند ۱ باشد. $f(x)$ احتمال است، پس باید بین ۰ و ۱ باشد.



فرض کنید $X =$ زمان لازم برای رسیدن قطار به ایستگاه است که دارای توزیع نرمال است.

$$X \sim N(10, 2) \quad \sigma^2 = 2 \quad \mu = 10$$

حقیقت محتمل است که ما را در مدت زمان ۱۰ دقیقه رسیدن قطار به ایستگاه است.

$$P(X=10) = A = \frac{0}{0} = \text{مردمان نوبت}$$

$$P(X=5) = B = \frac{f(10)}{f(5)}$$

مردمان در $R.V$ بسته، احتمال هر نقطه

معنی $P(X=5) = P(X=10) = 0$ است، علی رغم اینکه $f(5) > 0$ و $f(10) > 0$ است.

$$P(X=a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(a - \frac{\epsilon}{2} \leq X \leq a + \frac{\epsilon}{2}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a-\frac{\epsilon}{2}}^{a+\frac{\epsilon}{2}} f(x) dx$$

$$= \epsilon f(a) \Rightarrow \frac{P(X=a)}{P(X=b)} = \frac{\epsilon f(a)}{\epsilon f(b)} = \frac{f(a)}{f(b)}$$

$$\frac{f(10)}{f(5)} = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(5-\mu)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{e^{-\frac{(10-10)^2}{2 \times 2}}}{e^{-\frac{(5-10)^2}{2 \times 2}}} = \frac{e^0}{e^{-\frac{25}{2}}} = \frac{1}{e^{-12.5}} = e^{12.5}$$

(۷)

توزیع شرطی $p_{X|Y}$: برای متغیر تصادفی X و Y ، pdf شرطی

$$f_{X|Y}(n|y) = \frac{f_{X,Y}(n,y)}{f_Y(y)}$$

که X به شرط Y عبارت است از

$$p(X=n|Y=y) = \frac{p(X=n, Y=y)}{p(Y=y)} \iff \frac{f_{X,Y}(n,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(n,y) \varepsilon_X \varepsilon_Y}{f_Y(y) \varepsilon_Y}$$

که ε_X و ε_Y به ترتیب X و Y هستند

اگر $p_{X|Y}$ یک توزیع افراطی باشد، زیرا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(n|y) dn = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{X,Y}(n,y)}{f_Y(y)} dn = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(n,y) dn}{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1$$

* مثال: عفویت و مردمی؛ دو گروه مبتلا به بیماری و مردمی داریم:

G1: ۲۰۰ نفر که هر نفر مستقلاً با احتمال $p_1 = 0.1$ آلوده است

G2: ۱۰۰ نفر که هر نفر مستقلاً با احتمال $p_2 = 0.4$ آلوده است

می‌خواهیم بدانیم: $P(55 \text{ نفر آلوده})$ را می‌توانیم به دست آوریم که اینک از

استراتژی زیر برای یافتن جواب استفاده می‌کنیم.

استاد به دست می‌دهد و برای هر گروهی می‌توانیم به دست آوریم که $R \sim RV$ و $R \sim RV$

و هدف ما این است که $A = \text{تعداد افراد آلوده در } G1$ و $B = \text{تعداد افراد آلوده در } G2$

$$A \sim \text{Bin}(200, 0.1)$$

$$B \sim \text{Bin}(100, 0.4)$$

می‌خواهیم $P(A+B, 55)$ را به دست آوریم.

۱)

الف) آخری؟ : A - کانٹوش : کارمی کنڈولس آزار رھندہ ہے

B - جمع متغیرات کا مجموعہ مستقل C - ضرب ترقیبی بہ کنگ جمع متغیرات
 تصادفی بردار مستقل (روش غلط ہے چون $np = 20$ ہے)
 کا صدف بہ ضد کا نام اس تزیب بردار پر اس سے

D - ضرب ترقیبی بہ کنگ جمع متغیرات تصادفی بردار مستقل

E : ہیٹیک نام انزروسی آرٹون درست نیست دیروسی آرٹون تیزواریم (غلط
 ہے چون D ضرب ترقیبی بہ کنگ
 بہ تین ؟ ہے ایک

صن ردی D داریم $\mu \sim np = 200 \times 0.1 = 20$
 $A \sim X \sim N(20, 1.8)$
 $\sigma^2 \sim np(1-p) = 20(1-0.1) = 18$

$B \sim Y \sim N(40, 24)$
 $\mu^2 \sim np = 400 \times 0.4 = 40$
 $\sigma^2 \sim np(1-p) = 40(1-0.4) = 24$

دارا نیز ؟ ہے ار
 حال : $W = X + Y$ عبارت است از :
 جمع تصادفی مستقل

$W = X + Y \sim N(20 + 40 = 60, 1.8 + 24 = 42)$

~~$P(W > 45)$~~ $P(A+B > 55) \approx P(W > 54.5)$

عبارت فنون طبق اصل سرورم بہ تصحیح پرسش در تزیب ؟ ہے ار بہ زمان
 بہ آئندہ ہے

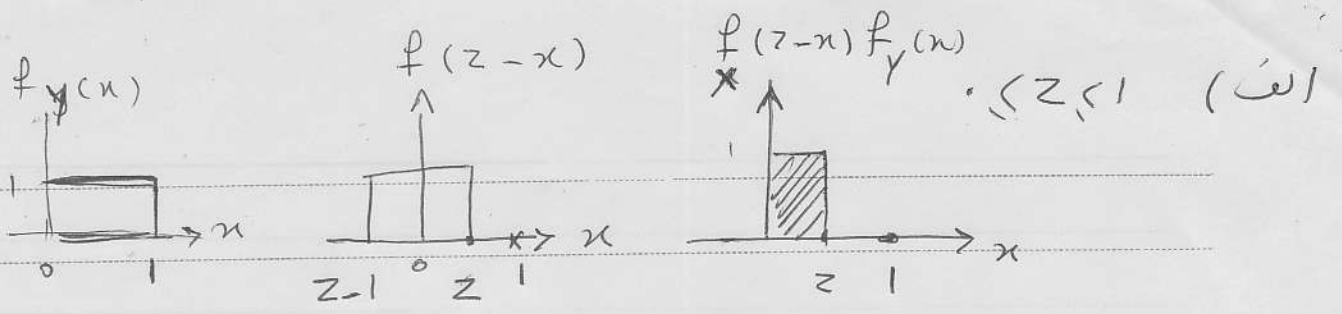
$P(W > 54.5) = 1 - \Phi\left(\frac{54.5 - 60}{\sqrt{42}}\right) = 1 - \Phi(-0.85) \approx 0.8023$

برہا بہ کا پیراں نیز ہے کہ ضرب اصل $P(A+B > 55)$ راہا $P(W > 54.5)$
 ؟ ہے ار محاسب کنند و تحقیق کنند کہ ضرب تزیب $P(W > 54.5)$ بہ از
 ضرب $P(W > 55)$ ہے

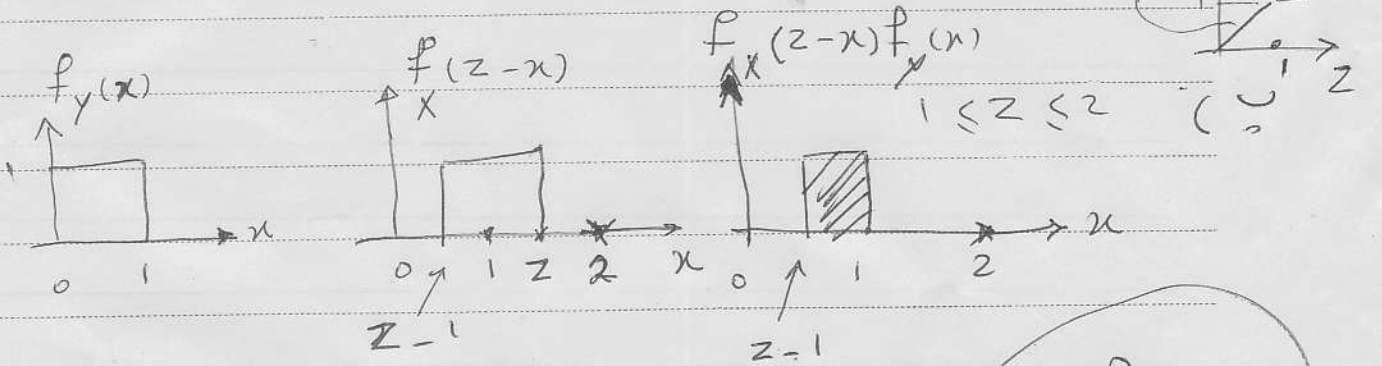
⑨

۱. نشر ال ندر را بر اساس $z = \begin{cases} 1 & 0 \leq z \leq 1 \\ 2 & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$ حد امکان به دست می آوریم

10

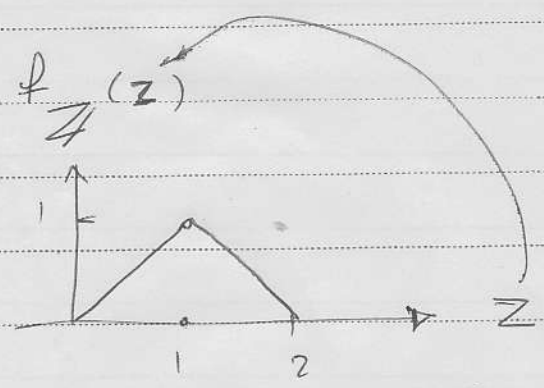


$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x) f_Y(x) dx = \int_0^z 1 \cdot 1 dx = x \Big|_0^z = z - 0 = z$$



$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x) f_Y(x) dx = \int_{z-1}^1 1 \cdot 1 dx = x \Big|_{z-1}^1 = 1 - (z-1) = 2-z$$

ناتمام به مجموع این دو، $f_Z(z)$ را الف، ب، و ج را با هم ترکیب می‌کنیم
 رقطه $f_Z(z)$ به صورت زیر به دست می‌آید



سوال: اگر x و y مستقل نباشند، $f_Z(z)$ را صاب کنید. ص 181

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(z-y, y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, z-x) dx$$

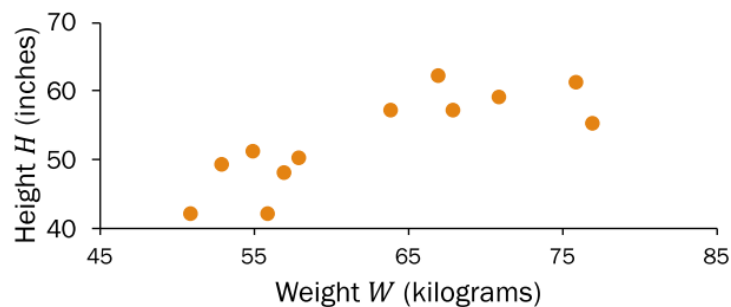
کوواریانس و همبستگی :

مثال: جدول مقابل وزن بر حسب کیلوگرم و قد بر حسب اینچ 12 نفر را نشان میدهد . در مورد کوواریانس این دو متغیر تصادفی بحث کنید.

$$E[W]=62.75 \quad E[H]=52.75 \quad E[WH]=3355.83$$

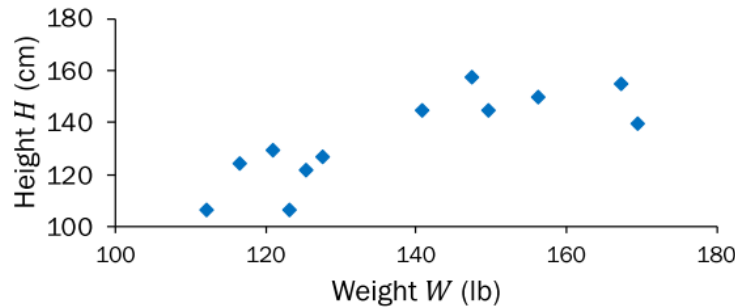
$$\text{Cov}(W,H)=E[WH]-E[W]E[H] =3355.83-(62.75)(52.75)=45.77 \text{ (positive correlation)}$$

Weight (kg)	Height (in)	W · H
64	57	3648
71	59	4189
53	49	2597
67	62	4154
55	51	2805
58	50	2900
77	55	4235
57	48	2736
56	42	2352
51	42	2142
76	61	4636
68	57	3876



اگر وزن بر حسب پوند و قد بر حسب سانتیمتر باشد کوواریانس این دو متغیر تصادفی را بدست آورید . مشاهده می نمایید که همان داده منجر به نتایج متفاوتی میشود (هر اینچ معادل 2.54 سانتیمتر و هر کیلوگرم معادل 2.2 پوند می باشد). این مثال نشان میدهد : برای کوواریانس ، **علامت** کوواریانس گویاتر از **مقدار** کوواریانس می باشد.

$$\text{Cov}(2.2W, 2.54H) = E[2.2W * 2.54H] - E[2.2W]E[2.54H] = 18752.38 - (138.05)(133.99) = 255.06 \text{ (positive correlation)}$$



بنابر این نیازمند مفهومی موسوم به **همبستگی** داریم که وابستگی به واحد داده ها نداشته باشد

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

که در آن

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X),$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y),$$

و همواره:

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

همبستگی ، معیاری برای بیان **رابطه خطی** بین X و Y است. سه مورد زیر را در نظر بگیرید.

در دو مورد اول رابطه خطی بین X و Y وجود دارد و متغیرها همبسته شدید هستند

$$\rho(X, Y) = 1 \quad \rightarrow \quad Y = aX + b, \quad \text{where} \quad a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \quad \text{همبستگی مثبت}$$

$$\rho(X, Y) = -1 \quad \rightarrow \quad Y = aX + b, \quad \text{where} \quad a = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \quad \text{همبستگی منفی}$$

$$\rho(X, Y) = 0 \quad \text{X و Y ناهمبسته هستند (در واقع رابطه خطی بین X و Y وجود ندارد)}$$

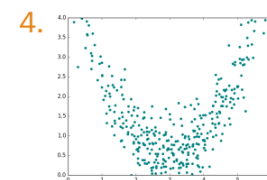
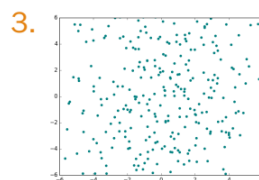
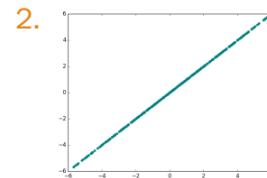
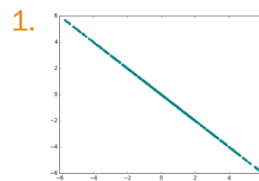
تمرین : ارتباط شکل های 1 تا 4 را با روابط A,B,C,D را مشخص نمایید.

A. $\rho(X, Y) = 1$

B. $\rho(X, Y) = -1$

C. $\rho(X, Y) = 0$

D. Other



جواب:

1-B $Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X + b$

خطی با ضریب زاویه منفی است . به مقدار ضریب زاویه هم توجه کنید و سعی کنید ان را متوجه شوید

2-A $Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X + b$

خطی با ضریب زاویه مثبت است . به مقدار ضریب زاویه هم توجه کنید و سعی کنید ان را متوجه شوید

3- C. $\rho(X, Y) = 0$ (ناهمبسته)

4- C. $\rho(X, Y) = 0$ $Y = X^2$

همانطور که تاکید شد **همبستگی** " خطی بودن " را اندازه می گیرد و شکل 4 نشان میدهد با آنکه کوواریانس X و Y صفر می باشد . این دو متغیر به طور " غیر خطی " با هم رابطه دارند

مثال دیگر از اینکه کوواریانس صفر بیانگر استقلال نیست.

فرض کنید متغیر تصادفی X هریک از مقادیر قلمرو خود $\{-1, 0, 1\}$ را با احتمال $1/3$ اختیار میکند. متغیر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{if } X = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

کدام گزینه زیر در مورد تابع جرم احتمال توام X و Y صحیح است؟ و توزیع های حاشیه ای را بنویسید

A.

		X		
		-1	0	1
Y	0	1/6	1/6	1/6
	1	1/6	1/6	1/6

B.

		X		
		-1	0	1
Y	0	1/3	0	1/3
	1	0	1/3	0

C.

		X		
		-1	0	1
Y	0	0	1/3	0
	1	1/3	0	1/3

جواب : B

		X			
		-1	0	1	
Y	0	1/3	0	1/3	2/3
	1	0	1/3	0	1/3
		1/3	1/3	1/3	

Marginal PMF of Y , $p_Y(y)$

Marginal PMF of X , $p_X(x)$

به سوال های زیر پاسخ دهید.

1. $E[X] \quad E[Y]$
2. $E[XY]$
3. $Cov(X, Y)$

4. آیا X و Y مستقل هستند؟

جواب:

1. $E[X] = 0 \quad E[Y] = \frac{1}{3}$
2. $E[XY] = 0$
3. $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$

XY همواره صفر است ، بنابراین

4. آیا مستقل هستند؟

$$P[Y = 0] = \frac{2}{3} \neq P(Y = 0|X = 0) = 0$$

خیر

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی:

برای دو متغیر تصادفی X و Y به طور کلی رابطه زیر برقرار است

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) = 0$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \text{Cov}(X + Y, X + Y) & \text{Var}(X) &= \text{Cov}(X, X) \\ &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, Y) & \text{covariance of all pairs} \\ &= \text{Var}(X) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) & \text{Symmetry of covariance + Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \end{aligned}$$

تعمیم فوق به صورت زیر است.

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \text{Cov}(X_i, X_j)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) & \text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X) & \text{covariance of all pairs} \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Cov}(X_i, X_j) & \text{Symmetry of covariance Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) & \text{Adjust summation bounds} \end{aligned}$$

روابط فوق در صورت استقلال متغیر ها چگونه می باشد؟

①

استقلال چیست؟
مستقل تصادفی

الف، استقلال چیست؟ : دو رویداد E, F مستقل هستند اگر:

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

تعریف معادل:

$$P(E|F) = P(E)$$

مثال: دو تاس ۶ وجهی را پرتاب می کنیم، نتایج D_1, D_2 را ثبت می کنیم.

$$E: D_1 = 1$$

$$EF = \{(1, 6)\}$$

$$F: D_2 = 6$$

$$G: D_1 + D_2 = 5$$

$$\rightarrow G = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$EG = \{(1, 4)\}$$

۲- آیا E, G مستقل هستند؟

$$P(E) = \frac{1}{6}$$

$$P(G) = \frac{4}{36}$$

$$P(EG) = \frac{1}{36} \neq P(E)P(G)$$

جواب: خیر

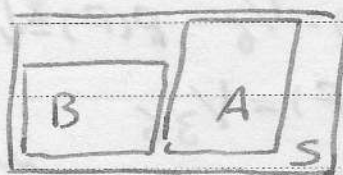
۱- آیا F, E مستقل هستند؟

$$P(E) = \frac{1}{6}$$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$P(EF) = \frac{1}{36} = P(E)P(F)$$

جواب: بله



مثال: دو رویداد A, B به صورت زیر در نظر بگیرید؟

A, B از هم جدا (disjoint) هستند

$$P(AB) = 0$$

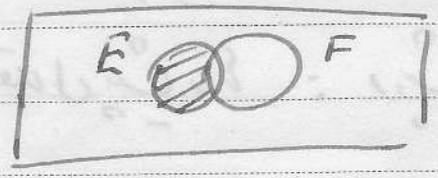
بنابراین $P(A)P(B)$ غیر صفر است (فقط وقتی که A, B همپوشانی داشته باشند، $P(B)$ و $P(A)$ هر کدام غیر صفر باشند).

استقلال برقرار است.

مثال: از هم جدا: چون می آید و جدا، دیگر شش رخ نمی دهد، پس مستقل هستند.

۲)

اگر E, F مستقل باشند، آنگاه E, F^c (که F مکمل F) مستقل هستند.



$$\begin{aligned} P(EF^c) &= P(E) - P(EF) \\ &= P(E) - P(E)P(F) \\ &= P(E)[1 - P(F)] \\ &= P(E)P(F^c) \end{aligned}$$

برابر بیشتر از درستی به استقلال زردی کافی نیست

۳: پس به E, F, G مستقل هستند، اگر علاوه بر استقلال زردی یعنی

$$P(EF) = P(E)P(F), P(EG) = P(E)P(G), P(FG) = P(F)P(G)$$

استقلال ۳ کافی هم برقرار باشد. $P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$

دو تاس ۶ وجهی را پرتاب می‌کنیم و D_1, D_2 حاصل درشت‌هسته‌ها اند.
پس به زیر را در نظر بگیرید

E : $D_1 = 1$

F : $D_2 = 6$

G : $D_1 + D_2 = 7$

$$P(EFG) = \frac{1}{36}$$

$G = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

۱- آیا E, F مستقل هستند؟ ۲- آیا E, G مستقل هستند؟ ۳- آیا F, G مستقل هستند؟

$P(F) = \frac{1}{6}, P(G) = \frac{1}{6}$ $P(FG) = \frac{1}{36}$	$P(E) = \frac{1}{6}, P(G) = \frac{1}{6}$ $P(EG) = \frac{1}{36}$	$P(E) = \frac{1}{6}, P(F) = \frac{1}{6}$ $P(EF) = \frac{1}{36}$
--	--	--

پس استقلال زردی برقرار است

۴- آیا E, F, G مستقل هستند؟ $P(EFG) = \frac{1}{36} \neq P(E)P(F)P(G) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

خیر استقلال درشت‌هسته‌ها برقرار نیست.

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

بیاید؟ :

استقلال { متغیر تصادفی : } گسسته و پیوسته

* در متغیر تصادفی گسسته X, Y مستقل هستند اگر :

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y) \quad \text{برای هر } x, y$$

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y) \quad \text{برای هر } x, y$$

بک شهر ری : داشتن مقدار X ، چیزی در مورد توزیع Y نمی گوید (و بالعکس)

: اگر در متغیر تصادفی مستقل نباشند ، وابسته (dependent) خواهند بود .

مثال : اگر D_1 و D_2 نتایج برآب ۲ تاس ۶ وجهی باشند .

* هر برآب یک تاس ۶ وجهی یک امتحان مستقل می باشد

* D_1, D_2 مستقل هستند .

آیا D_1, S مستقل هستند ؟

$$P(D_1=1, S=5) = \frac{1}{3} = ?$$

$$P(D_1=1, S=7) = ?$$

$$P(D_1=1)P(S=5) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{36}$$

$$= P(D_1)P(S=7) = \frac{1}{6} \times \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$$

بنظری آیا به دلی با برآب است کرد

که هر بیاید؟ $(X=x, Y=y)$ باید مستقل باشند ، تا آنکه بگوئیم X و Y

متغیر تصادفی مستقل هستند

در چگون $(D_1=1, S=7)$ بیاید؟ به نظر مستقل است
 ، $(D_1=1, S=5)$ وابسته هستند

[هم مقدار D_1 از ۱ تا ۶ ، و مقدار S از ۲ تا ۱۲ می باشد .]

* متغیر تصادفی مستقل: پیوسته

۱- متغیر تصادفی پیوسته X و Y مستقل هستند، اگر:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) P(Y \leq y)$$

یا به طور معادل:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

برای هر x و y :

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

به طور کلی: X و Y مستقل هستند اگر توزیع توافقی، رابطه صورت صفر

عوامل درشت $-\infty < x, y < \infty$:

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x) h(y)$$

سوال: در توزیع گاوسی:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; F_X(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}; F_Y(y) = \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)$$

در رابطه زیر صادق هستند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = f_X(x) f_Y(y)$$

بی مستقل هستند:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

سوال: ~~متغیر تصادفی~~ X و Y مستقل هستند اگر: $-\infty < x, y < \infty$

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x) h(y)$$

۱) $f_{X,Y}(x,y) = 6e^{-3x}e^{-2y}$ مستقل هستند.

x	y
$x > 0$	$y > 0$
$x < 0$	$y < 0$

توزیع به صورت زیر صدق می کنند:

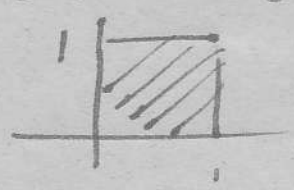
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 3e^{-3x} & x > 0 \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

بی مستقل هستند.

(۵)

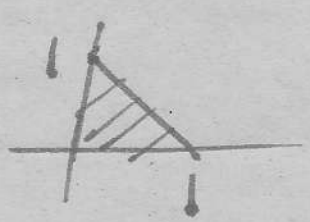
۱- $f_{X,Y}(x,y) = 4xy \quad 0 < x,y < 1$



$g(x) = 2x$
 $h(y) = 2y$

تابع جدا از جدا هستند
بر مستقل هستند

۲- $f_{X,Y}(x,y) = 8xy \quad 0 < x,y < 1$
و
 $x+y < 1 \rightarrow$ قيد



با توجه به قيد $x+y$ غیر توان
توزیع تراکم را به صورت معادله - عوامل نوشت
پس مستقل نیستند

نکته: اگر بتوانیم با روش معادله معادله با support
تغییر؟ رابطه بین معادله - عوامل نوشت، آنگاه استقلال داریم

تبدیل خطی و استقلال:

فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد و $Y = 2X = X + X$
توزیع Y را به روش تبدیل خطی و استقلال به دست آوریم
میتوانیم که اطمینان به جواب صحیح بخریم.

پارس متغیر لفظ انی مستقل

اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
 اگر $Y = aX + b$
 ہوگا $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

$$Y = 2X \quad a=2, b=0$$

$$Y \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$$

از ۲ ردیف به ۲ جواب متفاوت رسیدیم .

که ام روزی به بر این علف منجر شده است؟

برای $y = x_1 + x_2$ متغیرهای مستقل x_1, x_2 و $y = x + x$ متغیرهای مستقل x و y را در نظر بگیرید.
 در هر دو حالت، چون x و x متغیرهای مستقل هستند.

مثال: دو بازیکن B و C مستعد یک بازی تصادفی هستند،
که ~~هر~~ حرکت بازیکن B و C طبق ~~توزیع~~ توزیع نرمال زیر
توزیع شده اند.
 $A_C \sim N(s=1657, 200^2)$

$$A_C \sim N(s=1657, 200^2)$$

$$A_B \sim N(S = 1470, 200^2)$$

اگر A_c و A_B مستقل باشند، فرض کنید

$$D = A_C - A_B = A_C + (-A_B)$$

که ام گزشتہ زیر توزیع D را بیان می کند.

9

$$3. D \sim N(1657 + 1470, 200^2 + 200^2)$$

$$3. \text{D} \sim N(1657 + 1470, 200^2 + 200^2)$$

4- معنی ام

جواب: اگرچه B ~~مستقل~~ همبسته است:

$$A \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow -A \sim (-\mu, \underbrace{(-1)^2 \sigma^2}_{\sigma^2})$$

$$D \sim N(1657-1470, 200^2 + 200^2)$$

$$N(187, 2 \times 200^2) \rightarrow \sigma = 283 \quad \sigma^2 = (283)^2 = 2 \times 200^2$$

$$P(D \geq 0) = 1 - F_D(0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 187}{283}\right) \approx 0.7454$$

۸

مجموع متغیر تصادفی حالت متغیر تصادفی مستقل

حالت متغیر تصادفی مستقل
موارد زیر برای توزیع $X+Y$ به درستی قابل تحقیق هستند.

$$X \sim \text{Bin}(\eta_1, P), Y \sim \text{Bin}(\eta_2, P) \rightarrow X+Y \sim \text{Bin}(\eta_1+\eta_2, P) \quad 1$$

مستقل X, Y

$$X \sim \text{poi}(\lambda_1), Y \sim \text{poi}(\lambda_2) \rightarrow X+Y \sim \text{poi}(\lambda_1+\lambda_2) \quad 2$$

مستقل X, Y

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2) \quad 3$$

مستقل X, Y

به درستی قابل گشتن هر یک از متغیر تصادفی هستند.

مثالی از کاربرد در فن: فرض کنید $A \sim \text{Bin}(30, 0.01)$ و $B \sim \text{Bin}(50, 0.02)$ متغیر تصادفی مستقل باشند. آيا می توان $P(A+B=2)$ را با روشی ساده

محاسبه کرد؟ جواب: هرگاه در توزیع λ چهار $p < 0.05$ در فن آن را با براس تقریب نزد و در هر دو ما هم A هم B شرط برقرار است

روش ۱: روش تقریبی روی ساده و تقریب با مجموع براس $A \approx X \sim \text{poi}(\lambda_1 = np = 0.3)$

$$B \approx Y \sim \text{poi}(\lambda_2 = np = 50 \times 0.02 = 1) \rightarrow P(A+B=2) \approx P(X+Y=2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$$

$X+Y \sim \text{poi}(\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 1.3)$ ≈ 0.2302

روش ۲: روش دقیق و نیازمند به دست صحت

$$P(A+B=2) = \sum_{k=0}^2 P(A=k) P(B=2-k)$$

$$= \sum_{k=0}^2 \binom{30}{k} 0.01^k (0.99)^{30-k} \binom{50}{2-k} 0.02^{2-k} 0.98^{48+k}$$

≈ 0.2327

جدول زیر توزیع احتمال توام 3 متغیر تصادفی گسسته X, Y, Z را نشان میدهد.

به سوالات زیر پاسخ دهید؟

		$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
$Z=0$	$Y = 1$	.006	.000	.000	.000	.000	.000
	$Y = 2$	.155	.069	.034	.006	.023	.029
	$Y = 3$	.092	.063	.023	.006	.006	.000
	$Y = 4$	.017	.029	.011	.006	.000	.000
	$Y \geq 5$	.029	.006	.011	.006	.000	.000
$Z=1$	$Y = 1$	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	$Y = 2$	.126	.040	.017	.017	.000	.017
	$Y = 3$	.046	.040	.006	.011	.000	.006
	$Y = 4$	.006	.006	.000	.000	.000	.000
	$Y \geq 5$	.006	.000	.017	.011	.000	.000

1- $P(Y \geq 5, X = 1, Z = 1)$

جواب: جعبه نشان داده شده در جدول (0.006).

2- $P(Z = z|X = x)$

راهنمایی: توزیع احتمال مربوطه را در قالب جدولی بدست آورید

3- $P(X = x|Z = z)$

راهنمایی: توزیع احتمال مربوطه را در قالب جدولی بدست آورید

جواب: ابتدا باید متغیر تصادفی Y را به حاشیه بفرستیم و به توزیع $P(X = x, Z = m)$ دست پیدا کنیم

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
$Z=0$	.299	.167	.080	.023	.029	.029
$Z=1$	.184	.086	.040	.040	.000	.023

به کمک توزیع فوق میتوان به سوال هایی نظیر $P(X = 1, Z = 1)$ پاسخ داد که مقدار آن مطابق جدول 0.184 است

سپس به کمک روابط زیر توزیع های $P(Z = z|X = x)$ و $P(X = x|Z = z)$ را بدست آورد

$$P(Z = z|X = x) = \frac{P(Z=z, X=x)}{P(X=x)}$$

$$P(Z = 0|X = 1) = \frac{P(Z = 0, X = 1)}{P(X = 1)} == \frac{.299}{.299 + .184} = .619$$

$$P(Z = 1|X = 1) = \frac{P(Z = 1, X = 1)}{P(X = 1)} == \frac{.184}{.299 + .184} = .381$$

.....

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
$Z=0$	.619	.659	.667	.364	1.000	.556
$Z=1$	.381	.341	.333	.636	.000	.444

$$P(X = x|Z = z) = \frac{P(X = x, Z = z)}{P(Z = z)}$$

$$P(X = 1|Z = 0) = \frac{P(X = 1, Z = 0)}{P(Z = 0)} == \frac{.299}{.299 + .167 + .080 + .023 + .029 + .029} = \frac{.299}{.627} = .477$$

$$P(X = 1|Z = 1) = \frac{P(X = 1, Z = 1)}{P(Z = 1)} == \frac{.184}{.184 + .086 + .040 + .040 + .000 + .023} = \frac{.184}{.373} = .493$$

.....

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
$Z=0$	.477	.266	.128	.037	.046	.046
$Z=1$	.493	.231	.108	.108	.000	.062

جدول زیر توزیع احتمال توام 3 متغیر تصادفی گسسته X, Y, Z را نشان میدهد.

به سوالات زیر پاسخ دهید؟

		$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
$Z=0$	$Y = 1$	.006	.000	.000	.000	.000	.000
	$Y = 2$	.155	.069	.034	.006	.023	.029
	$Y = 3$	.092	.063	.023	.006	.006	.000
	$Y = 4$	.017	.029	.011	.006	.000	.000
	$Y \geq 5$	.029	.006	.011	.006	.000	.000
$Z=1$	$Y = 1$	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	$Y = 2$	.126	.040	.017	.017	.000	.017
	$Y = 3$	.046	.040	.006	.011	.000	.006
	$Y = 4$	.006	.006	.000	.000	.000	.000
	$Y \geq 5$	.006	.000	.017	.011	.000	.000

1- $P(Y \geq 5, X = 1, Z = 1)$

جواب: جعبه نشان داده شده در جدول (0.006).

2- $P(Z = z | X = x)$

راهنمایی: توزیع احتمال مربوطه را در قالب جدولی بدست آورید

3- $P(X = x | Z = z)$

راهنمایی: توزیع احتمال مربوطه را در قالب جدولی بدست آورید

①

Law of the unconscious statistician : LOTUS

$$E[g(x)] = \sum_x g(x)p(x)$$

در تاس ۶ وجهی را ۲ بار پرتاب می‌کنیم و آن‌ها را D_1, D_2 می‌نامیم. فرض کنید

$$X = D_1 + D_2 \quad \text{مقدار}$$

$$Y = D_2 \quad \text{مقدار}$$

اگر $E[X|Y=6]$ را حساب کنید.

$$\sum_x x p(X=x | Y=6) = 2 \times 0 + 3 \times 0 + \dots + 6 \times 0$$

$$+ 7 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{6} + \dots + 12 \times \frac{1}{6} = 9.5$$

(*) به طور مستقیم به جواب نرسیم : $6 + E[\text{val of } D_1] = 6 + 3.5 = 9.5$

مثال (۲) ۱- $E[X]$ ۲- $E[X, Y]$ ۳- $E[X|Y]$

$$E[X=1] \quad 6 \quad E[Y|X] \quad 5 \quad E[X|Y=6] \quad 4$$

چون کدام از اعداد فوق ~~XXXX~~ با کدام مورد زیر مطابقت است.

A - یک عدد $g(y)$ - تابعی از y B - تابعی از x C - تابعی از x $g(x)$

D - تابعی از x و y $g(x, y)$ E - متغیری ندارد

۱- A ۲- E ۳- B ۴- A ۵- C جواب :

۶- $E[X=1]$ E نمی‌توان امید یک بیت را محاسبه کرد

مثال : $E[X|Y]$ با کدام مورد مطابقت است.

A - یک تابع از y B - یک تابع از x C - یک عدد

جواب : A

(۲)

مورد ۱: صفت را رادشون کرده است.

$$E[X|Y=6]=9.5$$

Let $w = \text{value of } D_i$, $X = w + Y$ Y, w مستقل هستند

$$\therefore E[X|Y=y] = E[w + Y | Y=y] = E[w + \underbrace{Y}_{E[Y|Y=y]} | Y=y] = y + E[w|Y=y]$$

$$= y + \sum_w w P(W=w|Y=y) = y + \sum_w w P(W=w)$$

بخت مستقل

$$= y + E[W] = y + 3.5$$

$$E[X|Y] = 3.5 + Y$$

$$E[E[X|Y]] = E[g(Y)] = \sum_y P(Y=y) E[X|Y=y]$$

تحقیق کنید:

$$g(Y) = E[X|Y]$$

$$= \sum_y P(Y=y) \sum_x x P(X=x|Y=y)$$

تعریف امید شرطی

$$= \sum_y \left(\sum_x x P(X=x|Y=y) P(Y=y) \right) = \sum_y \left(\sum_x x P(X=x, Y=y) \right)$$

قاعده زنجیر

$$= \sum_x \sum_y x P(X=x, Y=y) = \sum_x x \sum_y P(X=x, Y=y)$$

همه یارون مکان ۳

$$= \sum_x x P(X=x)$$

میانگین تغییرات x

$$= E[X]$$

* برنامه بازگشتی زیر را در نظر بگیرید

$f()$: uniform

x is randomly selected from $\{1, 2, 3\}$

if $(x == 1)$; ret 3

elseif $(x == 2)$; ret $(5 + f())$

else ret $(7 + f())$

فرض کنید لا تعداد بازگشت داده شده توسط $f()$ باشد، $E[Y]$ را بیابید

۳

$$E[Y] = E[Y|X=1]P(X=1) + E[Y|X=2]P(X=2) + E[Y|X=3]P(X=3)$$

صراحتاً $\frac{1}{3}$

وقتی $X=1$ است، 3 بار به تیراندازی می‌رسد

وقتی $X=2$ است، 5 بار به تیراندازی می‌رسد و به تیراندازی $f(0)$ می‌رسد.

$$E[Y|X=2] = \dots$$

$$E[Y] + 5$$

$$E[Y+5] = 5 + E[Y]$$

$$E[5] + E[Y|X=2]$$

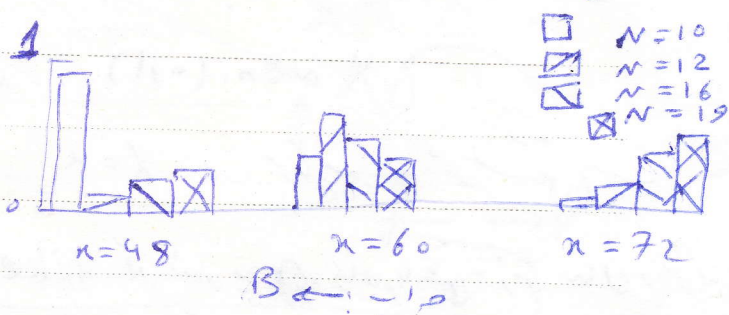
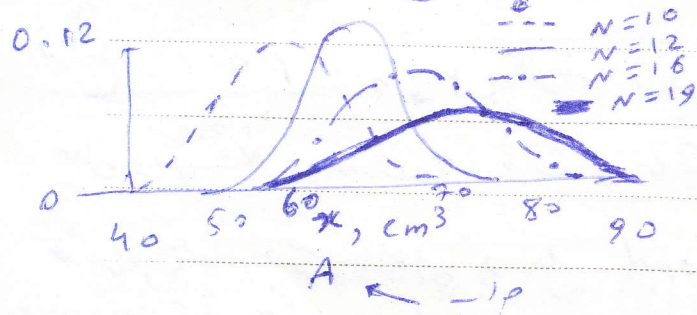
وقتی $X=3$ است، 7 بار به تیراندازی می‌رسد و به تیراندازی $f(0)$ می‌رسد.

$$E[Y|X=3] = 7 + E[Y]$$

$$E[Y] = 3 \times \frac{1}{3} + (5 + E[Y]) \left(\frac{1}{3}\right) + (7 + E[Y]) \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} ((3+5+7) + 2E[Y]) = 5 + \frac{2}{3} E[Y] \Rightarrow E[Y] = 15$$

تلفیق متغیر تصادفی گسسته و پیوسته:
فرض کنید X متغیر تصادفی گسسته و N متغیر تصادفی پیوسته باشد.
اگر $(10, 12, 16, 19)$ باشد، شکل زیر توزیع احتمال N را رسم کنید.



A. $f_{X|N}(x|n)$ - PDF شرطی X بر N

B. $p_{N|X}(n|x)$ - PMF شرطی N بر X

در نهایت، کار بردار x را از $n = n$ ، ~~XXXXXXXXXX~~ ، شتاب

بدرست میدهد
XXXXXXX
شماره ثبت به شماره دفتری X و در کاربری به آن پسین

posterior = تدریس و باور $P_{X|N}(x|n)$

ان را ن. م. رهیم (۱) به تلفیق و ترکیب و پیوسته و در یک (۲)

$$P_{X|N}(x|n) = \frac{P_{N|X}(n|x) P_X(x)}{P_N(n)} = \frac{\binom{n+m}{m} x^n (1-x)^m}{P_N(n)}$$

$$= \frac{\binom{n+m}{n}}{P_N(n)} x^n (1-x)^m = \frac{1}{c} x^n (1-x)^m \quad c = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx \quad \checkmark$$

تاریخ ۱۳۰۲

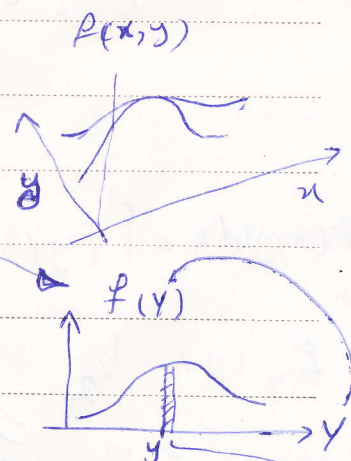
عوض کنند λ و γ متغیرهای پیوسته باشند.

PDF شرطی x به شرط y (که در آن فرض می‌کنیم $f_y(y) > 0$) تا خروجی

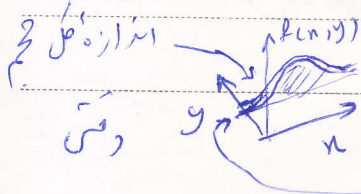
صوفی (عزت است)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad \blacktriangledown$$

$$\frac{\int_{x=0}^x \int_{y=0}^y f_{x,y}(x,y) dy dx}{\int_{y=0}^y f_y(y) dy} = \frac{\int_{x=0}^x \int_{y=0}^y f_{x,y}(x,y) dy dx}{\int_{y=0}^y f_y(y) dy}$$



$$P(x \leq X \leq x+dx | y \leq Y \leq y+dy) = \frac{P(x \leq X \leq x+dx, y \leq Y \leq y+dy)}{P(y \leq Y \leq y+dy)}$$



مثلاً: $f(x)$ و $f'(x)$

و @ علم کا درجہ حاصل کیا۔ بہت سی کامیابی

(9) احتمال مشترک

محتمل مشترک را می توان به صورت مقدار زیر نوشت

$$P_X(x) = \int_y P_{X|Y}(x|y) P_Y(y) dy = E_Y[P_{X|Y}(x|y)]$$

$$f(x, y) = y(1/2 - x) + x \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

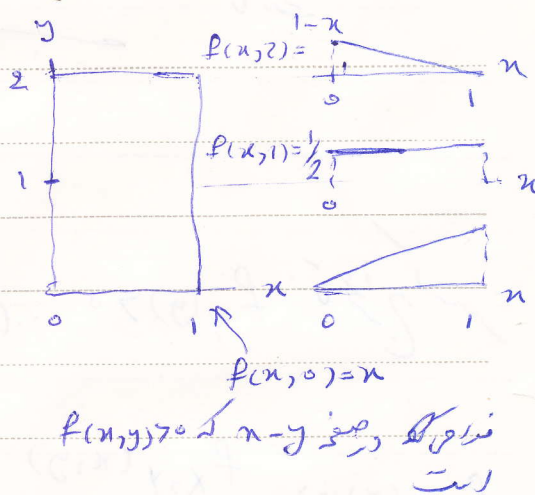
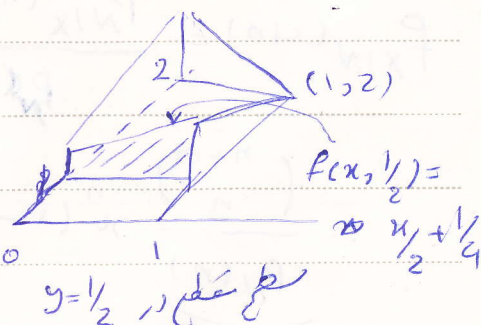
otherwise = 0

در سطح مقطع، تقاطع کشید. شیب سطح مقطع، صاف $1/2$ و شیب نزولی است.

$$f(x, 1/2) = 1/2(1/2 - x) + x = \frac{x}{2} + 1/4$$

برای اینکه توزیع به یک سطر فوق، تریایع احتمال است.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^1 [y(1/2 - x) + x] dx dy \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^1 y(1/2 - x) dx + \int_0^1 x dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[y \int_0^1 (1/2 - x) dx + \int_0^1 x dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[yx - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \right] dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$



در فضا، شیب نزولی و شیب فوق، به شکل الیاسی است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 [y(1/2 - x) + x] dx = 1/2 \quad 0 < y < 2$$

که توزیع مشترک y ثابت است از $f_Y(y) = 1/2 \quad 0 < y < 2$ در غیر این صورت = 0

که شیب در y هم توزیع یکسان است $U(0, 2)$ است.

(۷)

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$$

$$= \int_0^2 [y(\frac{1}{2}-x)+x] dy \quad \bullet \text{ اگر } x < \frac{1}{2}$$

$$= (\frac{1}{2}-x) \int_0^2 y dy + 2x \quad \bullet \text{ اگر } x < \frac{1}{2}$$

$$= 2(\frac{1}{2}-x) + 2x \quad \bullet \text{ اگر } x < \frac{1}{2}$$

$$= 1 \quad \bullet \text{ اگر } x < \frac{1}{2}$$

$$= 0 \quad \text{در غیر اینصورت}$$

که یک توزیع یکدست است $uni(0,1)$

در حالت فوق $f_x(x) f_y(y) = \frac{1}{2} \neq f(x,y)$ که به معنی استقلال نیست

توزیع شرطی x به شرط $y=y$ و برعکس y به شرط $x=x$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)}$$

$$= \frac{y(\frac{1}{2}-x)+x}{\frac{1}{2}} \quad \bullet \text{ اگر } x < \frac{1}{2}$$

$$= y(1-2x) + 2x \quad \text{در غیر اینصورت}$$

$$= 0$$

ار (۸)

که معادله فوق به ضریب تغییر کننده $\frac{1}{2}$ ها را دارد سطح مقطع در صفحه xy است

$$\text{اگر } y = \frac{1}{2} \text{ داریم}$$

$$f(x|\frac{1}{2}) = x + \frac{1}{2} \quad \bullet \text{ اگر } x < \frac{1}{2}$$

$$= 0 \quad \text{در غیر اینصورت}$$

نکته داریم که این سطح مقطع y که از آنجا به عنوان چگالی در شرطی مقید نشده یا در کنیم با تغییرات y از نظر شکل و مقیاس عوض می کنند (برای y به مقدار y شکل صفحه من تغییر می کند)

1

$$f(y|x) = f_y(y) \quad \text{اگر } x \text{ و } y \text{ مستقل باشند}$$

$$f(x|y) = f_x(x) \quad \text{اگر } x \text{ و } y \text{ مستقل باشند}$$

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \quad \text{اگر } x \text{ و } y \text{ مستقل باشند}$$

مستقل بودن x و y مستلزم استقلال f_x و f_y است.

مثال: pdf. x و y به صورت زیر است:

$$f(x, y) = \frac{12}{7} (x^2 + xy) \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

9- $P(X > Y)$ - توزیع مشترک (X, Y) را بیابید. $f_x(x)$ و $f_y(y)$ را بیابید.

$$P(X > Y) = \int \int_{x > y} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_y^1 \frac{12}{7} (x^2 + xy) dx dy$$

پاسخ: (9)
 $x > y \rightarrow y \in [0, 1]$
 $x \in [y, 1]$

$$= \int_0^1 \frac{12}{7} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} \right) \Big|_y^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{12}{21} + \frac{12}{14} y - \frac{12}{21} y^3 - \frac{12}{14} y^3 \right) dy = \frac{19}{14}$$

$$f_x(x) = \int_0^1 \frac{12}{7} (x^2 + xy) dy = \frac{12}{7} x^2 + \frac{6}{7} x$$

$$f_x(x) = 0 \quad x < 0 \text{ و } x > 1$$

مثال: فرض کنید X = تعداد افرادی که در روز به ناندرای مراجعه می کنند $X \sim N(50, 25)$

Y_i = هزینه ~~XXXXXXXXXX~~ نایب است $Y_i \sim \text{poi}(8)$ مستقل می باشد.

$$W = \sum_{i=1}^X Y_i$$

تعداد سبب ها را به دست آوریم

X و Y_i مستقل

$$E[W] = E\left[\sum_{i=1}^X Y_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^X Y_i \mid X\right]\right] = E[X \cdot E[Y_i]]$$

چقدر است؟ $E[W]$

$$= E[X] E[Y_i] = 50 \cdot 8$$

(9)
$$E\left[\sum_{i=1}^X Y_i \mid X=n\right] = \sum_{i=1}^n E[Y_i \mid X=n] = \sum_{i=1}^n E[Y_i] = n E[Y_1]$$

↓ وقتی تعداد مشخص باشد

$$E\left[\sum_{i=1}^X Y_i \mid X\right] = X \cdot E[Y_1]$$

* مثال: تغییر تعداد X را می‌خواهیم و می‌فراهم در مورد Y می‌شنود. بگویم
 مثلا $X = 4$ تعداد مشتری (صف درخت $= 9$ صبح $= 4$ = تعداد مشتری درخت $= 4$ صبح
 فرض کنید $g(X)$ تابعی باشد که برای پیش‌بینی Y بکار می‌رود، یعنی $\hat{Y} = g(X)$
 به زبان آن $g(X)$ هستیم که $E[(Y - g(X))^2]$ را کم می‌کنیم.
 [بهترین پیش‌بینی: $g(X) = E[X|Y]$]

به طور مشخص $E[(Y - c)^2]$ وقتی که $c = E[Y]$ است کمینه می‌شود
 * اکنون X را می‌خواهیم و Y هم X را می‌داند، بنابراین
 $c = E[Y|X]$ (تایید می‌شود) $XXXXXX$

مطلب فوق در واقع شروع یادگیری ماشین است

* متغیر تصادفی X : Indicator RV
 $X = \begin{cases} 1 & \text{اگر } A \text{ رخ دهد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$
 $XXXXXX$ متغیر تصادفی X است، A است، $XXXXXX$
 اثبات کنید.

$E[X] = P[A]$ به طریقی به $E[X|Y=y] = P[A|Y=y]$ و Y برابر
 بنابراین $E[X] = E_Y[E_X[X|Y]] = E[E[X|Y]] = E[P(A|Y)]$
 برای حالت کلی: $E[X] = \sum_y P(A|Y=y) P(Y=y) = P(A)$
 قضای امکان در هر طریقی به $E[X] = P(A)$ (بسیار مهم)
 برای حالت کلی: $E[X] = P(A)$

$$P(A) = \sum_y P(A|Y=y) P(Y=y)$$

مثال: استخدام منشی: n توصیف می‌کنیم.

n می‌تواند هشتاد و نه واریان باشد، یعنی انداز ترتیب ورودی n منشی، است که هم راست در افعال در نظر بگیرد، می‌فراهم فقط n فوراً استخدام می‌کنیم.

ادعای از نظر بهره‌وری ~~XXXXXX~~ بین "بهترین" و "مدرسه" یک ضرب

رشد $\alpha = 1$ و عدد دارد. کپی A ، ضرب $\alpha = 25$ و کپی B ضرب $\alpha = 100$ را در نظر بگیر.

* فرض: با ماصد بر از ماصد با بر تقسیم کنیم که استخدام کنند و با ضرب

فصلی که از ~~XXXX~~ ماصد توانا (م) به دست می‌آورد، یک رتبه‌بندی در ماصد با این کارندیدار فصلی به شما می‌دهد.

* استراتژی استخدام: استرا از بین n نفر، با k توصیف می‌کنند و آنها را

استخدام می‌کنند. سپس از بین کاندیدی که از k توصیف بهتر باشد را استخدام می‌کنند.

* افعال زیر را به این ترتیب تعرف می‌کنیم

$P_k(\text{best}) =$ افعال آنکه بهترین کاندید از بین n توانایی بود

$X =$ ترتیب بهترین کاندید ($1, 2, \dots, n$)

$$P_k(\text{Best}) = \sum_{i=1}^n P(\text{Best} | X=i) P(X=i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_k(\text{Best} | X=i)$$

$\frac{1}{n}$ از هر کدام از n ترمینالند بهترین باشد

به این جهت، اگر بهترین تو فرد k توانایی باشد یعنی k و چون ما او را

استفاده کرده ایم، بهترین: اگر k ≤ 1 $P_k(\text{Best} | X=L) = 0$ (۱۱)

* نیاور استه استر استقام، ما شتر استه - استه من گاند ارادارم XXXXXX

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX (فصل دوم) در سرفصل و کاربرد آن

لبنین کا مدد اس کا تو مصدع ہو گیا ہے اس لیے K فوائد ہوتے ہیں

و اطمینان آن را به صورت $P_k(\text{Best} | X=i)$ نشان می دهیم.

تعداد می کشید که ~~XXXXXXXXXXXX~~ ، از همین روز که در وقت نوار دارد، جزو کارهای فاضل باشد ~~XXXXXXXXXXXX~~

آفتاب من را شب لایق تو را از دست داده ام / طبع الهی از من جدا شده ام (6)

~~XXXXXX~~ $P_k(\text{Best} | x=i) = 0 \quad i \leq k \text{ für}$

$$P_k(\text{Best} | X=i) = P_k(\text{بترین نود را - ا نوسباف, ک نواران} | X=i) = \frac{k}{i-1} \quad i > k$$

$$Q: P_K(\text{Best}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_K(\text{Best} | X=i) = \frac{1}{n} \sum_{i=K+1}^n \frac{K}{i-1}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1} \approx \frac{k}{n} \int_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1} di = \frac{k}{n} \ln(i-1) \Big|_{k+1}^n$$

$$= \frac{k}{n} \ln \frac{n-1}{k} = \frac{k}{n} \ln \frac{n}{k}$$

برای بهینه سازی، از P_{Best} نسبت به K مشتق می گیریم.

$$g(k) = \frac{k}{n} \ln \frac{n}{k} \quad g'(k) = \frac{1}{n} \ln \frac{n}{k} + \frac{k}{n} \left(\frac{-1}{k} \right) = \frac{1}{n} \ln \frac{n}{k} - \frac{1}{n}$$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
 قرار می دهیم $g'(k) = 0$ در حد k حل می کنیم.

$$\frac{1}{n} \ln \frac{n}{k} - \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \ln \frac{n}{k} = 1 \rightarrow \frac{n}{k} = e \Rightarrow k = \frac{n}{e}$$

۷. $\frac{n}{e}$ فوراً مضاعف کنید و سپس $\frac{n}{e}$ را اشتراک کنید که اعداد آن ها

$$P_k(\text{Best}) \approx 1/e = 0.368$$

CLRS - W. J. R.

بجای چند متغیر

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{اشتراک} \\ P(E|F) = P(F) \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{افزودن شرطی} \\ P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{استقلال} \\ P(EF) = P(E)P(F) \end{array}}$$

توزیع؟ در حالت چند متغیره

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{توزیع} \\ \text{PDF / PMF} \\ P_{X,Y}(x,y) \\ f_{X,Y}(x,y) \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{توزیع شرطی} \\ P_{X|Y}(x|y) \\ f_{X|Y}(x|y) \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{متغیرهای مستقل} \\ \text{جمع متغیرهای} \\ \text{مستقل} \end{array}}$$

یک مکان: ردگیری شی در فضای ۲ بعدی (مقدمه از به و دیگری)

① یک باور پیشین در مورد محل یک شی در ۲ بُعد داریم. (X,Y) کمالات شی؟

② یک متغیر در مورد فاصله شی از یک پیکر آغشته شده (منطق یک منبع

توزیع مکان) انجام گرفته و این فاصله $d = 9$ متر است و یک

③ باور پسین (posterior) شی در هر دو مکان می باشد

۲ بعدی بر اساس داده اندازه گیری شی چه می باشد. در احوال بینی در واقع

$$\begin{array}{l} \text{در بردار فضا ۲ بعدی} \\ \text{پسین (posterior belief)} \\ \text{پسین} \\ \text{prior belief} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{دیتای (داده)} \\ f_{D|X,Y}(d|x,y) \\ f_D(d) \end{array} \quad \begin{array}{l} P_{X,Y}(x,y) \\ \text{نسبت نهال کشیده} \end{array}$$

$$f_{X,Y|D}(x,y|d) = \frac{f_{D|X,Y}(d|x,y) P_{X,Y}(x,y)}{f_D(d)}$$

① فرض کنید (داده) = سبزه: محل ۲ بعدی شی (X,Y)

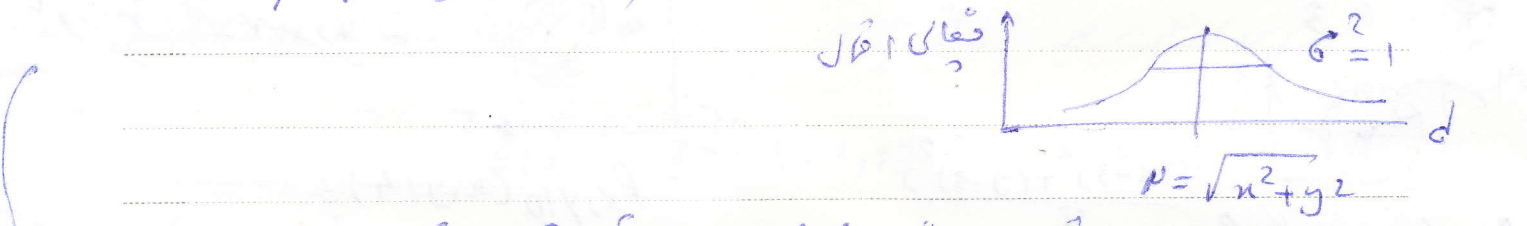
فرض کنید توزیع پیشین یک مکان ۲ متغیره متغیر باشد.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-[(x-3)^2 + (y-3)^2]/2\sigma^2} = K_1 e^{-\frac{[(x-3)^2 + (y-3)^2]}{8}}$$

در فرض فرض کنید $\sigma^2 = 2$ ، $\mu_x = \mu_y = 3$ ، $K_1 =$ ثابت نهال کشیده

۲- متعهد، نزدیک $D=4$ (قیمت ریسک بانی ما کم)
 فرض کنید $D=0$ کاملاً شعاعی شود از مبدأ باشد. فرض کنید محل واقعی می باشد
 در مکان (x, y) برای رانیم. D هزینه نزدیک آغشته شده که توزیع دایره
 توزیع با دایره نیز $D=1$ هم فرض می شود. در بیانین D مکان واقعی ران
 می رود. $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$

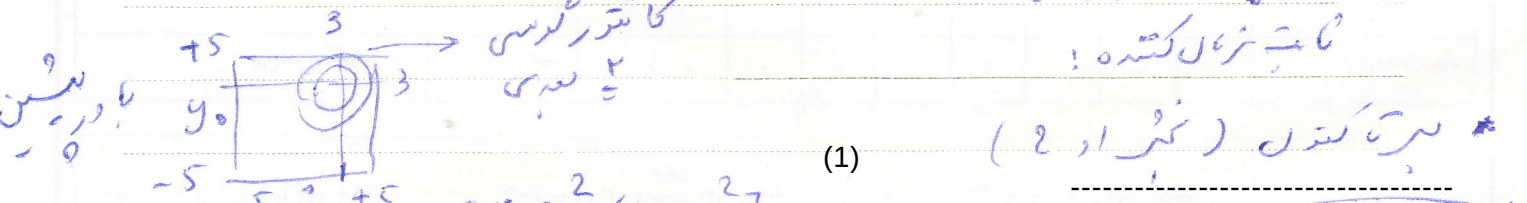
می دانیم
 اگر محل واقعی (x, y) را بدینهم، ~~XXXXXXXXXX~~ $P(x, y)$ (likely)
 که اندازه تغییر با تغییر $D=4$ شده
 حد انتح آرن نیز را مثال فرض کنیم.



حداکثر از تغییر با هم مثبت به محل ~~XXXXXXXXXX~~ و واقعی می باشد، توزیع مثال دارد.

$$f_{D|x,y}(D=d | x=n, y=y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\downarrow$ 4 در مکان با $(\sigma^2=1, \mu=\sqrt{x^2+y^2})$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d-\sqrt{x^2+y^2})^2}{2}}$ $= \frac{K}{2} e^{-\frac{(4-\sqrt{x^2+y^2})^2}{2}}$
 $\sigma^2=1$



(1) $f_{x,y}(n,y) = K_1 e^{-\frac{[(x-3)^2 + (y-3)^2]}{8}}$

(2) $f_{D|x,y}(d|x,y) = K_2 e^{-\frac{(d-\mu)^2}{2}}$

متصوره (likelihood) درست نمی باشد

(3) $f_{x,y|D}(n,y|4) = f_{x,y|D}(x=n, y=y | D=4)$

و باور بستن

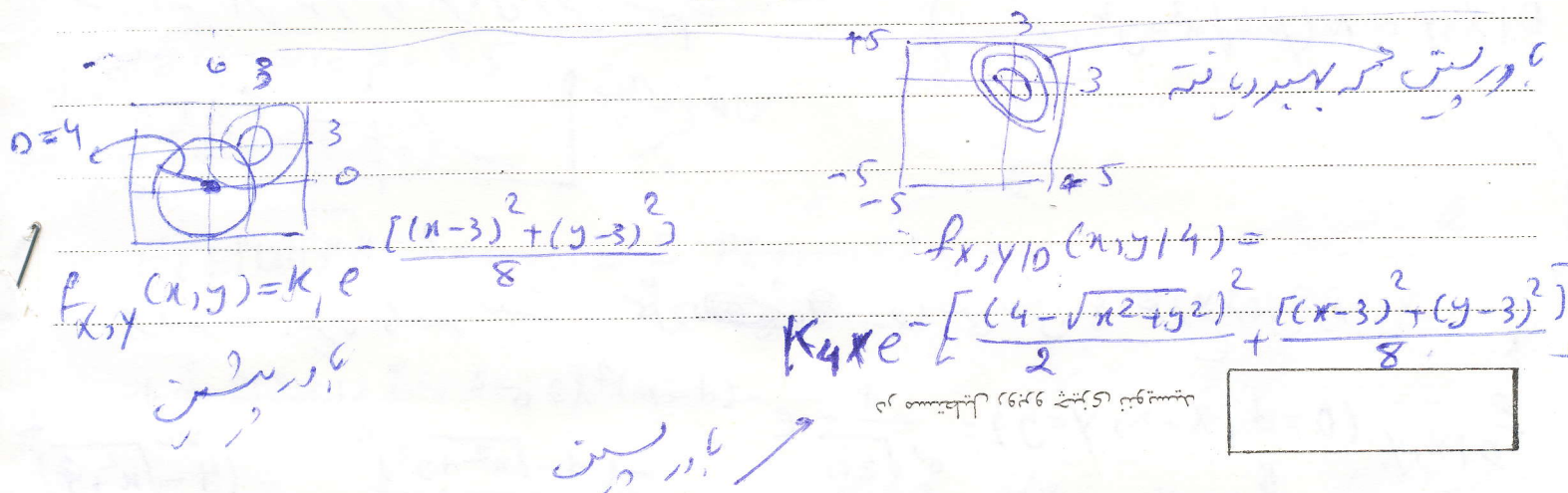
~~XXXXXXXXXX~~

فصل ۳: بار در برزخ (پسین) در هر مدل ۲ سدی می باشد بر اساس داده اندازه گیری (۱.۴)
طبق زیر و یک بند به بزرگتر از ۲ می باشد و ...
تندی سدی ...

$$P_{x,y|D}(x=n, y=y|D=4) = \frac{P_{D=4}(x=n, y=y) P_{x,y}(n,y)}{P(D=4)}$$

$$= \frac{k_2 \cdot e^{-\frac{(4-\sqrt{n^2+y^2})^2}{2}} \cdot k_1 \cdot e^{-\frac{[(x-3)^2+(y-3)^2]}{8}}}{P(D=4)}$$

$$= \frac{k_3 \cdot e^{-\frac{[(4-\sqrt{n^2+y^2})^2]}{2} + \frac{[(x-3)^2+(y-3)^2]}{8}}}{P(D=4)} = k_4 \cdot e^{-\frac{[(4-\sqrt{n^2+y^2})^2]}{2} + \frac{[(x-3)^2+(y-3)^2]}{8}}$$



امضاء استاد	تیرة نوبتی	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	شماره سوال	تیرة
-------------	------------	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------------	------

نام و نام خانوادگی: نام خانوادگی: نام:

شماره دانشجویی: رشته تحصیلی: نام خانوادگی:

تاریخ امتحان: نام و نام خانوادگی: نام:

جمع ۲ تغییر دانی مستقل ؟

فرض کنید D_1, D_2 اعداد غزنی دارند. D_1 و D_2 به صورت $2, 3, 4, 5, 6$ و $1, 2, 3, 4, 5, 6$ به ترتیب تغییر می کنند. $E(D_1) = E(D_2) = 3.5$

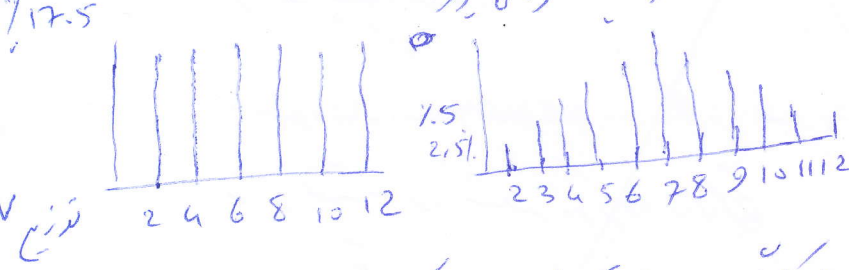
توزیع D_1 و D_2 ، $D_1 \sim D_2$ ، D_1 و D_2 مستقل

$V = D_1 + D_1$
 $W = D_1 + D_2$

در هر دو مورد ، D_1 و D_2 تغییر دانی که در اعداد آنها 6 دارای توزیع یکسان هستند را در نظر جمع کردن هستیم.

$E[V] = E[W] = 7$

ولی توزیع V و W کاملاً تفاوت است. W به مقدار 2 تا 12 را در نظر می گیرد و V فقط مقدار 2 و 4 و 6 و 8 و 10 و 12 را به خود اختصاص می دهد. W توزیع V متعادل تر است و V توزیع W را می پوشاند.



اگر W می باشد ، با آنکه V بیشتر

هر دو 7 می باشد. ، در نظر تفاوت در برآوردی مربوط به آن است که در $W = D_1 + D_2$ و $V = D_1 + D_1$ در $V = D_1 + D_1$ در واقع دو برابر مقدار انداختن یک دانی است. V و W هم بزرگ است ولی در W ، گاهی ممکن است ، چون در V ، دانی D_1 بزرگ تغییر بزرگی مقدار مجموع به هر رابطه D_1 تغییر می کند ، در نتیجه است.

در جمع n تغییر مستقل σ^2 $\leftarrow \text{var}(S_n) = \text{var}(X_1) + \dots + \text{var}(X_n) = n\sigma^2$
 $SD(S_n) = \sqrt{n} \sigma$
 $SD(W) = \sqrt{2} \times 1.71$ $\leftarrow 1.71 = SD(D_1)$ $\leftarrow$ در شکل فوق $\leftarrow$ $SD(V) = SD(D_1 + D_1) = SD(2D_1) = 2SD(D_1) = 2 \times 1.71$

$E(xy^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xy^2) f_{xy}(n,y) dndy = \int_0^1 \int_0^1 xy^2 (x+y) dndy$
 $= \int_0^1 \int_0^1 (x^2y^2 + xy^3) dndy = \int_0^1 (\frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{2}y^3) dy = \frac{17}{72}$

درس ارزیابی کارایی

دکتر خونساری

۱۴۰۰

اطلاعات ارسالی در اسکایپ:

۱.

یک مسئله: فرض کنید $U_1, U_2, \dots$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی i.i.d Uniform[0,1] باشند. اگر N ایندکس کمینه ای باشد که $U_1 + U_2 + \dots + U_N \leq 1$ باشد. $E[N]$ را حساب کنید. جواب این سوال ها در اینترنت هست. منظور من از این سوال ها این است که ابهام هایی که دانشجویان معمولا با آن مواجه هستند را به شما گوشزد کنم. اگر کسی راه حل خیلی جالب به همراه کد پایتون و یا آر پیدا می کند میتواند آن را به اشتراک بگذارد.

۲.

جمع متغیرهای تصادفی بحث جالبی است جمع تعدادی برنولی، دوجمله ای / جمع تعدادی نمایی، ارلانگ و یا گاما و ... اما در لینک بالا قضیه حد مرکزی بیان شده که نشان میدهد جمع متغیرهای تصادفی آبی آبی دی با آرایش ذکر شده نرمال می باشد. به تفاوت مفهومی مورد فوق الذکر کمال دقت را داشته باشید. سعی کنید برای درک بهتر کد پایتون و یا آر را بنویسید. مخصوصا دقت کنید که در جمع متغیرهای تصادفی یکنواخت خیلی سریعتر از جمع مثلا نمایی به نرمال همگرا می شوند. سعی کنید علت این تفاوت در نرخ همگرایی را متوجه شوید.

آدرس کد پایتون توزیع های نرمال برنولی دوتایی نمایی و ..

<https://colab.research.google.com/drive/1o73Zrf5G9SVUFW2UY-qcGn3BhWCPktXr?usp=sharing>

۳.

Tail of distribution is $P(X > x)$. For some distributions (light tailed) such as expected it decays fast. for some distributions (long tailed, heavy tailed) such as Pareto it decays slowly. So, for heavy tailed you see big values in the support of distr. many times and you couldn't ignore such values.

۴.

<https://demonstrations.wolfram.com/IllustratingTheCentralLimitTheoremWithSumsOfUniformAndExponential/#popup1>

۵.

برای دانشجویانی که ریاضی را فراموش کرده اند:

https://amsi.org.au/ESA_Senior_Years/PDF/

۶.

The distribution of max and min of independent RVs

Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be independent random variables

(distribution functions $F_i(x)$ and tail distributions $G_i(x)$). $i = 1, \dots, n$)

Distribution of the maximum

$$\begin{aligned} P\{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x\} &= P\{X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\} \cdots P\{X_n \leq x\} (\text{independence!}) \\ &= F_1 \cdots F_n \end{aligned}$$

Distribution of the minimum

$$\begin{aligned} P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > x\} &= P\{X_1 > x, \dots, X_n > x\} \\ &= P\{X_1 > x\} \cdots P\{X_n > x\} (\text{independence!}) \\ &= G_1(x) \cdots G_n(x) \end{aligned}$$

برای ماکزیمم به خود تابع توزیع فکر کنید : یعنی اگر بخواهیم ماکزیمم کمتر - مساوی ایکس باشد یعنی همه متغیر ها هم کمتر - مساوی ایکس خواهند بود و به علت استقلال، احتمالات توأم، مساوی حاصلضرب احتمالات است و برای می نیمم به مکمل توزیع فکر کنید و اگر مینیمم بزرگتر از ایکس باشد یعنی همه بزرگتر از X خواهند بود و روابط فوق صحیح هستند.

سوال : چرا CDF احتمال است؟

لینک های ارسالی در گروه:

<https://towardsdatascience.com/sum-of-exponential-random-variables-b023b61f0c0f>

<https://homepage.divms.uiowa.edu/~mbognar/applets/gamma.html>

look at other distributions and try to play with parameters of each distribution and change the random variable in the support (range) of each distribution

<https://homepage.divms.uiowa.edu/~mbognar/>

http://www.statisticalengineering.com/sums_of_random_variables.htm

[https://stats.libretexts.org/Bookshelves/Probability_Theory/Book%3A_Introductory_Probability_\(Grinstead_and_Snell\)/07%3A_Sums_of_Random_Variables/7.02%3A_Sums_of_Continuous_Random_Variables](https://stats.libretexts.org/Bookshelves/Probability_Theory/Book%3A_Introductory_Probability_(Grinstead_and_Snell)/07%3A_Sums_of_Random_Variables/7.02%3A_Sums_of_Continuous_Random_Variables)

https://www.probabilitycourse.com/chapter10/10_1_0_basic_concepts.php

<https://www.geeksforgeeks.org/python-numpy-np-multinomial-method/>

<https://www.geeksforgeeks.org/sympy-stats-multinomial-function-in-python/>

https://www.probabilitycourse.com/chapter5/5_2_5_solved_prob.php