

سوال ۱ - یک تاس را همواره پرتاب می کنیم. فرض کنید

X_n بزرگترین مقدار مشاهده شده در n پرتاب اول باشد

S_n تعداد خال های 6 مشاهده شده در n پرتاب اول باشد

T_n تعداد خال های 6 مشاهده شده در بین پرتاب های $n-1$ و n باشد.

کدامیک از سه مورد فوق زنجیره مارکف هستند و برای آنها گراف گذار را ترسیم کنید.

سوال 2 - فرض کنید در آغاز در ظرفی ۴ توپ سفید و توپ سبز وجود دارد. دو توپ به تصادف از ظرف انتخاب میشود. اگر یکی آنها قرمز و دیگری سبز باشد آنها را حذف می کنیم و با ۲ توپ آبی جایگزین می نماییم. در همه موارد دیگر دو توپ انتخاب شده را دوباره در ظرف قرار می دهیم. فرض کنید X_n تعداد توپ های قرمز باقیمانده در ظرف پس از n تکرار عمل فوق باشد. نشان دهید X_n یک زنجیره مارکف است و ماتریس گذار آن را بیابید.

سوال 3 - ۵ توپ را بین دو ظرف با بر چسب های A و B توزیع میکنیم. در هر مرتبه یک ظرف به تصادف انتخاب میشود و اگر خالی نباشد یک توپ را از آن به ظرف دیگر منتقل می نماییم. در درازمدت و در میانگین چه کسری از زمان ظرف A خالی خواهد بود.

سوال 4 - ماتریس گذار یک زنجیر مارکف که دارای حالت های ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ است در زیر نشان داده شده است. همه دسته های مرتبط (هم ارز را بنویسید)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

سوال 5 -

هر یک از دو گلدان حاوی m توپ هستند. از مجموع $2m$ توپ، m سفید و m سیاه هستند. یک توپ به طور همزمان از هر گلدان انتخاب و به گلدان دیگر منتقل می شود، و این فرآیند به طور نامحدود تکرار می شود. توزیع حالت پایدار تعداد توپ های سفید در هر گلدان چیست؟

سوال 6 - برای فرایند پواسن $X(t)$ با نرخ λ و دو زمان مفروض $t_1 < t_2$ توزیع توام جرم احتمال $X(t_1)$ و $X(t_2)$ را بدست آورید

سوال 7 -

یک سیستم تعاملی که دارای ۱۵ ترمینال ($N = 15$) و میانگین زمان فکر ۵۰ ثانیه ($\mathbb{E}[Z] = 50$) است. بهره وری دیسک در این سیستم $\rho_{\text{disk}} = 0.2$ و میانگین تعداد ملاقات های دیسک به ازای هر خروجی $\mathbb{E}[V_{\text{disk}}] = 80$ است. اگر میانگین زمان سرویس در هر بار مراجعه به دیسک برابر $\mathbb{E}[S_{\text{disk}}] = 0.025$ ثانیه باشد، امید زمان پاسخ $\mathbb{E}[R]$ را حساب کنید.

Utilization Law: $\rho_i = X_i \cdot \mathbb{E}[S]$	Forced Flow Law: $X_i = \mathbb{E}[V_i] \cdot X$	Little's Law: $N = X \cdot \bar{T}^{\text{Time Avg.}}$
---	--	--

سوال 8 -

یک صف $M/M/1$ با بافر محدود به اندازه N را در نظر بگیرید (یعنی حداکثر تعداد مشتریان در سیستم، شامل مشتری در حال خدمت، N است). اگر نرخ ورود λ و نرخ خدمت μ باشد، احتمالات حالت پایدار P_n (برای $n = 0, 1, \dots, N$) را به دست آورید.