

۱- فرض کنید اعداد تصادفی زیر، نمونه هایی از یک تابع توزیع باشند. دامنه این اعداد تصادفی بازه اعداد حقیقی  $[0..5]$  است. تابع  $F_X(x)$  را برای اعداد صحیح بدست آورید. (۲ نمره)

۳.۵، ۲.۱، ۰.۲۵، ۴.۳، ۴.۹، ۰.۷، ۱.۵، ۳.۹، ۱.۷، ۲.۰۱

جواب:

| تعداد | بازه |
|-------|------|
| ۲     | ۱-۰  |
| ۲     | ۲-۱  |
| ۲     | ۳-۲  |
| ۲     | ۴-۳  |
| ۲     | ۵-۴  |

بنابراین

$$F_X(x) = \begin{cases} 0.2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0.4 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0.6 & 2 \leq x \leq 3 \\ 0.8 & 3 \leq x \leq 4 \\ 1 & 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

۲- داده های زیر تعداد تماس ها در یک مرکز تلفن در ساعت های مختلف مربوط به پنج روز دوشنبه را نشان می دهد. به نظر شما فرآیند تماس ها بین ساعت ۸ صبح تا ۴ بعدازظهر از چه توزیعی تبعیت می کند؟ مدل آن را بدست آورید. (۴ نمره)

|                 | ۹-۸ | ۹-۱۰ | ۱۱-۱۰ | ۱۲-۱۱ | ۱۳-۱۲ | ۱۴-۱۳ | ۱۵-۱۴ | ۱۶-۱۵ |
|-----------------|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| دوشنبه اول      | ۲۷  | ۳۷   | ۵۸    | ۶۸    | ۶۵    | ۳۳    | ۳۷    | ۲۱    |
| دوشنبه دوم      | ۲۷  | ۳۵   | ۶۷    | ۹۳    | ۷۴    | ۴۲    | ۳۹    | ۲۱    |
| دوشنبه سوم      | ۲۵  | ۳۹   | ۵۸    | ۷۵    | ۸۲    | ۳۴    | ۴۶    | ۱۹    |
| دوشنبه<br>چهارم | ۱۸  | ۴۲   | ۴۸    | ۷۵    | ۶۲    | ۵۱    | ۴۹    | ۱۴    |
| دوشنبه پنجم     | ۲۹  | ۴۲   | ۶۵    | ۸۸    | ۷۰    | ۴۳    | ۴۵    | ۲۲    |

۳- شبیه سازی خط تولید یک محصول ۲۵ بار انجام شده است (دوباره سازی) و با اطمینان ۹۰ درصد میانگین WIP آن  $32 \pm 218$  بدست آمده است. احتمال آنکه میانگین WIP کمتر از ۳۵۰ باشد، چیست؟ ۸۵ امین percentile میانگین WIP را بدست آورید.  
(۲ نمره)

جواب:

$$S = \frac{H\sqrt{R}}{t_{0.05,24}} = \frac{32\sqrt{25}}{1.71} = 93$$

$$P(\bar{Y}_t \leq 350) \approx P\left(z \leq \frac{350 - 218}{93}\right) = P(z \leq 1.42) = 0.92$$

$$\hat{\theta} \cong \bar{Y}_{..} + z_{0.85} \times s = 218 + 1.04 \times 93 = 315$$

۴- فرض کنید در مدت ۱۰ دوره زمانی، روند مدت زمان تولید یک محصول و مقدار تقاضا برای آن را مشاهده کرده و داده های زیر را بدست آورده ایم. (۶ نمره)

| تعداد تقاضا | مدت زمان تولید محصول برحسب واحد زمان |
|-------------|--------------------------------------|
| ۸۵          | ۴.۲                                  |
| ۱۰۱         | ۶.۹                                  |
| ۹۵          | ۵.۹                                  |
| ۱۱۸         | ۷                                    |
| ۱۰۲         | ۶.۸                                  |
| ۱۱۴         | ۷                                    |
| ۱۰۴         | ۵.۹                                  |
| ۱۱۱         | ۷.۲                                  |
| ۹۰          | ۴.۳                                  |
| ۹۸          | ۶.۵                                  |

پس از بررسی عملکرد مقادیر فوق، ۲ مقدار تصادفی دیگر که با مقادیر فوق هم توزیع باشند را تولید کنید.

جواب:

۵- دو بار شبیه سازی ، هر بار به مدت  $T_{E_1}$  انجام شده است و داده هایی به صورت زیر گردآوری شده اند.

$$\{y_{1i}: i \in [1, \dots, n_1]\} \text{ (الف)}$$

$$\{y_1(t): 0 \leq t \leq T_{E_1}\} \text{ (ب)}$$

برای هر دو حالت ،  $\bar{Y}_1$  و نیم بازه اطمینان را حساب کنید. (۲ نمره)

جواب:

(الف)

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{1\cdot} &= \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} Y_{1i} \\ S_{1\cdot}^2 &= \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (Y_{1i} - \bar{Y}_{1\cdot})^2 \\ H_1 &= \frac{t_{\frac{\alpha}{2}, n_1 - 1} S_{1\cdot}}{\sqrt{n_1}}\end{aligned}$$

(ب)

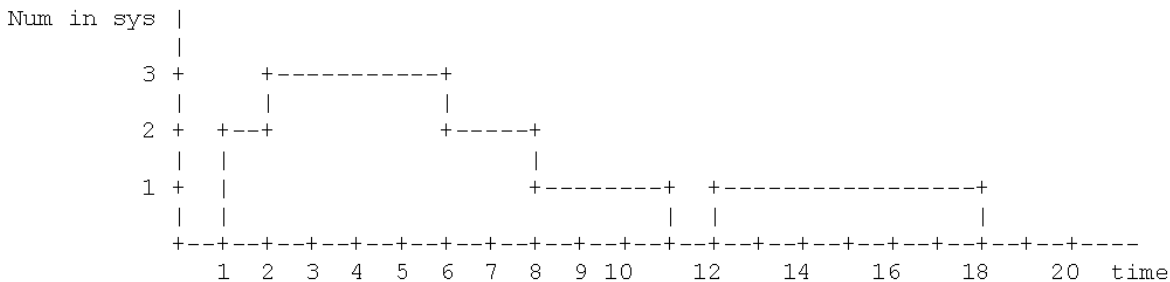
$$\begin{aligned}\bar{Y}_{1\cdot} &= \frac{1}{T_{E_1}} \int_0^{T_{E_1}} Y_1(t) dt \\ S_{1\cdot}^2 &= \frac{1}{T_{E_1}} \int_0^{T_{E_1}} (Y_1(t) - \bar{Y}_{1\cdot})^2 dt \\ H_1 &= \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} S_{1\cdot}}{\sqrt{T_{E_1}}}\end{aligned}$$

۶- یک سیستم صف تک سروری را از زمان ۰ تا ۲۰ ثانیه در نظر بگیرید.

- مشتری اول در ثانیه ۱ وارد سیستم شده و درخواست ۵ ثانیه سرویس دارد.
- مشتری دوم در ثانیه ۱ وارد سیستم شده و درخواست ۲ ثانیه سرویس دارد.
- مشتری اول در ثانیه ۲ وارد سیستم شده و درخواست ۳ ثانیه سرویس دارد.
- مشتری اول در ثانیه ۱۲ وارد سیستم شده و درخواست ۶ ثانیه سرویس دارد.

مقادیر گذردهی، مجموع زمان کار سرور، میانگین زمان سرویس، بهره وری، میانگین زمان انتظار در سیستم و میانگین طول صف را بدست آورید. نمودار تعداد مشتری در سیستم را بر حسب زمان رسم کنید. (۳ نمره)

جواب:



$$throughput = \frac{\text{no. of customers}}{\text{total service time}} = \frac{4}{20} = 0.2 \quad \frac{\text{customer}}{\text{sec}}$$

$$\text{mean service time} = \frac{\text{Busy period} = 16 \text{ sec}}{\text{no. of customers}} = \frac{16}{4} = 4 \quad \frac{\text{sec}}{\text{customer}}$$

$$utilization = \frac{16}{20} = 0.8$$

$$\text{waiting in system} = \frac{27}{4} = 6.75 \text{ sec}$$

$$\text{mean of length queue} = \frac{27}{20} = 1.35 \quad \text{customer}$$

۷- فرض کنید شما مسئول بررسی عملکرد ۳ سرور هستید. شما هر روز صبح می بایست سرور ها را چک نمایید. احتمال اینکه هر یک از سرورها دچار خرابی شوند، ۱۰ درصد می باشد. خرابی سرورها به همدیگر وابسته نمی باشند. برنامه ای بنویسد که این سیستم را شبیه سازی نموده و خروجی های زیر را ارائه نماید. (۳ نمره)

الف) احتمال خرابی  $i$  سرور به ازای  $i = 0,1,2,3$

ب) میانگین و واریانس تعداد سرورهای خراب هر روز

جواب:

```
#include <stdio.h>
double rand_val(void);
void main(void)
{
    int total, i, s1, s2, s3, sum, count[4];
    total = 1000000;
    count[0] = count[1] = count[2] = count[3] = 0;
    for (i=0; i<total; i++)
    {
        sum = s1 = s2 = s3 = 0;
        if (rand_val() < 0.10) s1 = 1;
        if (rand_val() < 0.10) s2 = 1;
        if (rand_val() < 0.10) s3 = 1;
        sum = s1 + s2 + s3;
        count[sum]++;
    }
    printf("Pr[0 down] = %f \n", (double) count[0] / total);
    printf("Pr[1 down] = %f \n", (double) count[1] / total);
    printf("Pr[2 down] = %f \n", (double) count[2] / total);
    printf("Pr[3 down] = %f \n", (double) count[3] / total);
}
```

The output from this program is:

```
Pr[0 down] = 0.729539
Pr[1 down] = 0.242726
Pr[2 down] = 0.026753
Pr[3 down] = 0.000982
```

موفق باشید



سوال ۱) بسته ها به یک گره مخابراتی بنا بر توزیع برنولی وارد می شوند ( یعنی در هر اسلات با احتمال  $p=0.09$  بسته های وارد می شود ). الف ) احتمال توام ورود ۳ بسته در بازه  $[1,20]$  ، ۶ بسته در بازه  $[1,40]$  ، ۱۲ بسته در بازه  $[1,80]$  را بدست آورید. (تعداد ورود در هر بازه از داده های فوق قابل محاسبه است )

ب) اگر بافر ورودی گره ظرفیت ۱۰۰۰ بسته را داشته باشد و در موقع پر شدن بافر بسته ها حذف شوند ، احتمال آنکه یک و یا بیشتر از یک بسته در بازه زمانی  $n=10,000$  حذف شود را بدست آورید؟

ج.اب

Solution: Let  $W_n$  be the number of packets arriving in interval  $[1, n]$ .

1. We want to find the following probability

$$P\{W_{20} = 3, W_{40} = 6, W_{80} = 12\},$$

which is equal to

$$P\{W_{20} = 3, W_{40} - W_{20} = 3, W_{80} - W_{40} = 6\}$$

By the independence property of the Bernoulli process this is equal to

$$P\{W_{20} = 3\}P\{W_{40} - W_{20} = 3\}P\{W_{80} - W_{40} = 6\}$$

Now, by the fresh start property of the Bernoulli process

$$P\{W_{40} - W_{20} = 3\} = P\{W_{20} = 3\}, \text{ and}$$

$$P\{W_{80} - W_{40} = 6\} = P\{W_{40} = 6\}$$

Thus

$$P\{W_{20} = 3, W_{40} = 6, W_{80} = 12\} = (P\{W_{20} = 3\})^2 \times P\{W_{40} = 6\}$$

Now, using the Poisson approximation of Binomial, we have

$$P\{W_{20} = 3\} = \binom{20}{3}(0.09)^3(0.91)^{17} \approx \frac{(1.8)^3}{3!}e^{-1.8} = 0.1607$$

$$P\{W_{40} = 6\} = \binom{40}{6}(0.09)^6(0.91)^{34} \approx \frac{(3.6)^6}{6!}e^{-3.6} = 0.0826$$

Thus

$$P\{W_{20} = 3, W_{40} = 6, W_{80} = 12\} \approx (0.1607)^2 \times 0.0826 = 0.0021$$

2. The probability that one or more packets are dropped in a time interval of length  $n = 10^4$  is

$$P\{W_{10^4} > 10^3\} = \sum_{n=1001}^{10^4} \binom{10^4}{n} (0.09)^n (0.91)^{10^4-n}$$

Difficult to compute, but we can use the CLT!

Since  $W_{10^4} = \sum_{i=1}^{10^4} X_i$  and  $E(X) = 0.09$  and  $\sigma_X^2 = 0.09 \times 0.91 = 0.0819$ , we have

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^{10^4} X_i > 10^3\right\} &= P\left\{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10^4} \frac{(X_i - 0.09)}{\sqrt{0.0819}} > \frac{10^3 - 900}{100\sqrt{0.0819}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10^4} \frac{(X_i - 0.09)}{0.286} > 3.5\right\} \\ &\approx Q(3.5) = 2 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

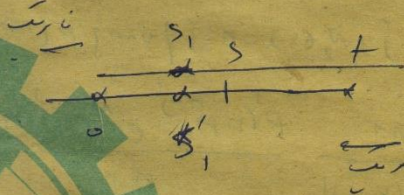
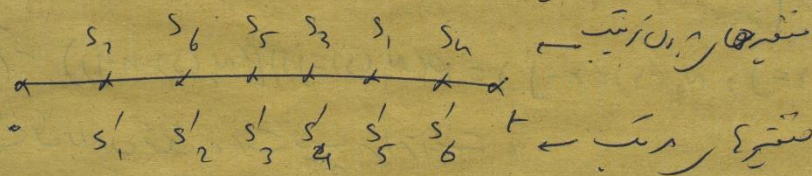
سوال ۲ ) اثبات کنید در فرایند پواسن اگر  $n$  ورود در بازه  $T$  رخ دهند ، این ورودها به طور یکنواخت در طول بازه توزیع شده اند

جواب:

خاصیت مهم دیگر توزیع براساس برابری (uniformity of arrival times)

فرض کنید در  $[0, t]$  ،  $n$  نقطه به صورت مساوی وارد شده باشد. زمان آمدن هر ورودی نامرتب (unordered) دارای توزیع گسسته و مستقل از هم است.

آزادی زمان  $S_i$  را  $S_i \sim U(0, t)$  IID بنویسیم.



اهمیت: (بهتر حالت تک ورودی را در نظر بگیرید)

$$P(S_1 \leq s | A(t) = 1) = P(A(s) = 1 | A(t) = 1)$$

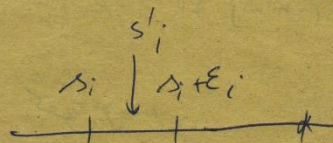
$$= \frac{P(A(s) = 1 \& A(t) = 1)}{P(A(t) = 1)}$$

بین  $(s, t)$  هیچ اتفاقی نمی افتد  
صفر ورود

$$= \frac{P(A(s) = 1) P(A(s, t) = 0)}{P(A(t) = 1)}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \sim U(0, t)$$

رنت داریم که در تکثیر افت ، احتمال ورود از یک سمت به جای طرف دیگر  
بزرگ و کوچک هر یک طرف با هم برابر است.



حالت عمومی:

در اینجا بازه  $[t, t+dt]$  را به  $n$  بازه های کوچکتر تقسیم می کنیم. هر یک از این بازه ها دارای احتمال  $\lambda dt$  است.  $P(A(s, t+dt) = 1 | A(s, t) = 1) = \lambda dt e^{-\lambda dt} \approx \lambda dt$

$$\Pr(s_i < s'_i < s_i + \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n \mid A(t) = n)$$

$$= \frac{\lambda \varepsilon_1 e^{-\lambda \varepsilon_1} e^{-\lambda(s_2 - (s_1 + \varepsilon_1))} \dots e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} \lambda \varepsilon_n e^{-\lambda \varepsilon_n} e^{-\lambda(t - s_n)}}{e^{-\lambda t} (t^n)}$$

$$\boxed{A(t)=n} \text{ پویایی } \left( \frac{e^{-\lambda t} (t^n)}{n!} \right)$$

$$= \frac{n!}{t^n} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow P_{s_1, \dots, s_n \mid A(t)=n} \quad (s_1, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{if } 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < t$$

که اگر ترتیب برش  $n$  (توسیع یکسانی است)

۱- در اثبات زیر کدام مفاهیم به کار رفته است؟

$$E[W_i] = E[R_i] + E[X]E\{N_i\} = R + \frac{N_Q}{\mu}$$

جواب :

امید تعدادی متغیر تصادفی

$$W_i = R_i + \sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j$$

pasta: From  $E[n_i]$  to  $N_Q$

little

۲- قاعده PASTA را توضیح دهید.

۳- کاربرد Confidence interval در شبیه سازی چیست و چگونه محاسبه می شود؟

۴- در فاز collection of data در شبیه سازی:

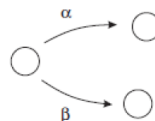
a. Steady state چیست ؟

b. ایراد استفاده از داده های فاز warm-up چیست؟

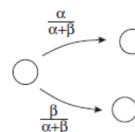
۵- مطالب بیان شده در اسلایدهای زیر را بنویسید (اسلاید ۱ و ۲ فقط ۲ نکته بسیار مهم و اسلاید ۳ ، چهار نکته بسیار مهم )  
اسلاید اول:

### constructing a CTMC (model 1 : DTMC with Exponential Transition Times)

- Markov process, transition **rates**  $q_{i,j}$  equilibrium probabilities  $\tilde{\pi}_i$



- Embedded Markov chain, transition **probabilities**  $p_{i,j}$
- equilibrium probabilities  $\pi_i$



اسلاید دوم:

# Ergodicity

## Ergodic process

In many cases, an ensemble of random processes cannot be obtained.

If parameters of a random process can be found from a single observation of the process, the process is said to be *ergodic*.

Mean ergodic

Distribution ergodic, etc.

## Time average

$$\langle X(t) \rangle_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$$

## Ensemble average

$$E[X(t)] = \bar{X}$$

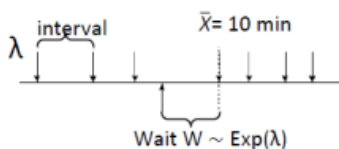
اسلاید سوم:

## Independence of the scheduling discipline

For the *M/M/1-FIFO queue* we have derived the queue length distribution  $\pi_n = (1 - \rho) \rho^n$ .

- This distribution is independent of the scheduling discipline (FIFO, LIFO, PS),  
– all these scheduling disciplines lead to exactly the same balance equations (proof is left as an exercise)
- Thus also the mean time in system,  $E[T] = 1/(\mu - \lambda)$ , is independent of the discipline (by Little's result the mean time in system equals the mean queue length divided by
- In the contrast, e.g. the distributions of  $W$  and  $T$  do depend on the discipline.

Note. The queue length distribution is not insensitive to the service time distribution in an *M/M/1-FIFO queue*. However, in *LIFO* and *PS* queues the insensitivity holds.



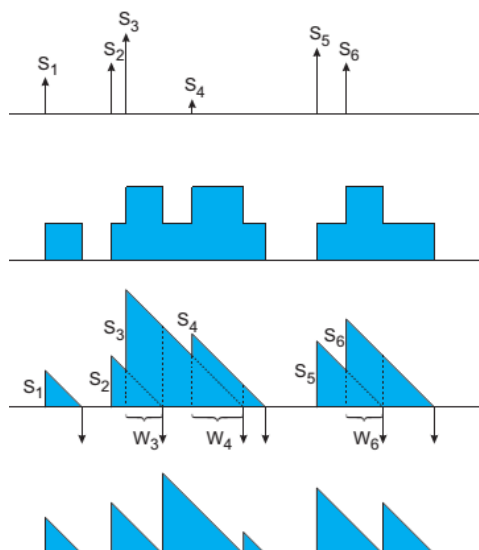
۶- در مساله hitchhike paradox با شرایط زیر به سوالات پاسخ دهید:

- ۱- ماشین ها بر طبق توزیع پواسن در حال عبور از یک نقطه هستند.
- ۲- متوسط فاصله زمانی بین ماشین ها ۱۰ دقیقه است.
- ۳- هر hitchhiker در یک زمان تصادفی در کنار جاده می ایستد.

الف) متوسط زمان انتظار تا آمدن ماشین بعدی چقدر است؟

ب) تناقض موجود در این مساله را بیان کنید. (با استفاده از نمودار و فرمول ریاضی)

۷- شکل های زیر چه مطلبی را بیان میکنند؟



موفق باشید

سوال ۱۰: بسته های ارسالی به یک شبکه، با توزیع پواسن و میانگین نرخ ۴۵ بسته در دقیقه وارد لینک واسط این شبکه با سایر شبکه ها می شوند. طول بسته ها متغیر و دارای توزیع نمایی با میانگین ۲۴۰ کاراکتر می باشد. (ظرفیت این لینک ۲۴۰۰ بیت در ثانیه، طول هر کاراکتر ۸ بیت و طول بافر شبکه بینهایت می باشد). مطلوب است:

الف) میانگین تعداد بسته های موجود در سیستم

ب) میانگین زمانی که یک بسته در سیستم سپری می نماید

ج) میانگین طول صف

د) میانگین زمان انتظار در صف

جواب:

سیستم را به صورت یک صف M/M/1 مدل می نماییم.

$$\lambda = 45 \frac{\text{packets}}{\text{min}} = 0.75 \frac{\text{packets}}{\text{sec}}$$

میانگین نرخ سرویس نیز برابر است با:

$$\mu = \frac{2400}{240 \times 8} = 1.25 \frac{\text{packets}}{\text{sec}}$$

و مقدار بهره وری:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{1.25} = 0.6$$

الف) میانگین تعداد بسته های موجود در سیستم

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{3}{2} \text{ packets}$$

ب) میانگین زمانی که یک بسته در سیستم سپری می نماید

مطابق با قانون لیتل داریم:

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1.5}{0.75} = 2 \quad \text{sec}$$

ج) میانگین طول صف

$$N_Q = \bar{N} - \rho = 1.5 - 0.6 = 0.9 \quad \text{packets}$$

د) میانگین زمان انتظار در صف

مطابق قانون لیتل:

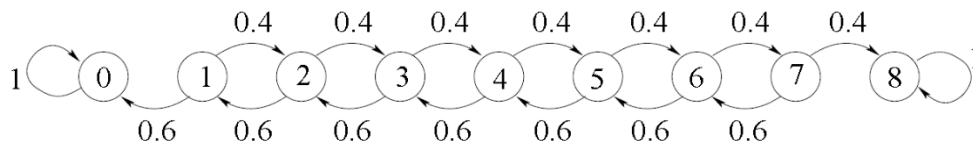
$$W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{0.9}{0.75} = 1.2 \quad \text{sec}$$

سوال ۳ - یک زندانی ۳ دلار پول دارد و می خواهد در یک شرط بندی شرکت کند. اگر او ۸ دلار برنده شود، آزاد می شود. او در هر بار شرط بندی با احتمال ۰.۴ برنده و با احتمال ۰.۶ بازنده می شود. در شرایط زیر احتمال اینکه این زندانی ۸ دلار برنده شود قبل از اینکه تمام پولش را از دست بدهد را بدست آورید. بدیهی است که اگر زندانی تمام پولش را از دست بدهد، دیگر نمی تواند به شرط بندی ادامه دهد.

الف) در هر بازی، زندانی فقط ۱ دلار شرط بندی کند

جواب:

مقدار پول زندانی در هر مرحله را حالت زنجیره مارکوف در نظر می گیریم:



احتمال اینکه زندانی از حالت  $i$  ام به حالت ۸ ام برسد قبل از اینکه به حالت ۰ برسد، را با  $P(i)$  نشان می دهیم. بنابراین داریم:

$$P(i) = 0.4 \times P(i + 1) + 0.6 \times P(i - 1)$$

$$p(0) = 0$$

$$p(8) = 1$$

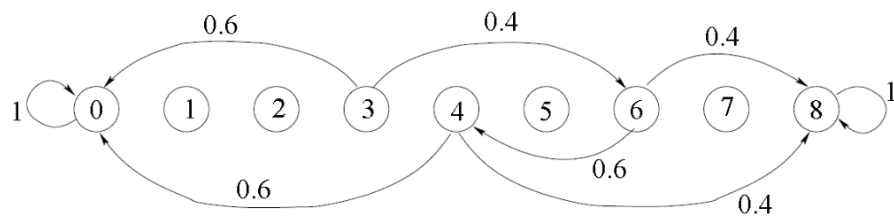
با حل معادلات خواهیم داشت:

$$P(3) = 0.096$$

ب) در هر بازی، زندانی به میزان لازم تا برنده شدن ۸ دلار شرط بندی نماید. یعنی اگر زندانی ۵ دلار داشته باشد، ۳ دلار شرط بندی نماید.

جواب:

زنجیره در این حالت به صورت زیر خواهد بود:



معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$P(3) = 0.4 P(6)$$

$$P(6) = 0.4 P(8) + 0.6 P(4)$$

$$P(4) = 0.4 P(8)$$

$$P(0) = 0$$

$$P(8) = 1$$

و داریم:

$$P(3) = 0.256$$

سوال ۴- بسته های ارسالی به یک شبکه، با توزیع پواسن و میانگین نرخ ۴۵ بسته در دقیقه وارد لینک واسط این شبکه با سایر شبکه ها می شوند. طول بسته ها متغیر و دارای توزیع نمایی با میانگین ۲۴۰ کاراکتر می باشد. (ظرفیت این لینک ۲۴۰۰ بیت در ثانیه، طول هر کاراکتر ۸ بیت و طول بافر شبکه بینهایت می باشد). مطلوب است:

جواب:

سیستم را به صورت یک صف M/M/1 مدل می نمایم.

$$\lambda = 45 \frac{\text{packets}}{\text{min}} = 0.75 \frac{\text{packets}}{\text{sec}}$$

میانگین نرخ سرویس نیز برابر است با:

$$\mu = \frac{2400}{240 \times 8} = 1.25 \frac{\text{packets}}{\text{sec}}$$

و مقدار بهره وری:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{1.25} = 0.6$$

الف) میانگین تعداد بسته های موجود در سیستم

جواب:

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{3}{2} \text{ packets}$$

ب) میانگین زمانی که یک بسته در سیستم سپری می نماید

جواب:

مطابق با قانون لیتل داریم:

$$T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1.5}{0.75} = 2 \quad sec$$

ج) میانگین طول صف

جواب:

$$N_Q = \bar{N} - \rho = 1.5 - 0.6 = 0.9 \quad packets$$

د) میانگین زمان انتظار در صف

جواب:

مطابق قانون لیتل:

$$W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{0.9}{0.75} = 1.2 \quad sec$$

ه) احتمال اینکه ۶ بسته یا بیشتر در صف موجود باشند

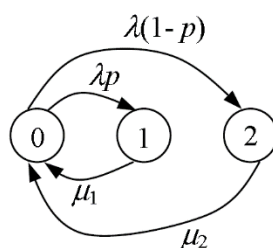
جواب:

$$P(N_Q \geq 6) = P(N \geq 7) = 1 - P(N \leq 6) = 1 - \sum_{n=0}^6 \rho^n (1 - \rho) = \rho^7 = 0.028$$

سوال ۵- نرخ خرابی یک سرور دیتابیس، دارای توزیع پواسن با میانگین ۲ بار در سال می باشد. خرابی های رخ داده دارای ۲ نوع می باشد. نوع اول با احتمال ۳۰ درصد و نوع دوم با احتمال ۷۰ درصد رخ می دهد. زمان صرف شده برای رفع هر دو نوع خرابی، دارای توزیع نمایی و به ترتیب با میانگین  $\frac{1}{10}$  و  $\frac{1}{15}$  سال می باشد. مطلوب است:

جواب:

زنجیره مارکوف زیر، مدلی برای سیستم تعریف شده می باشد:



حالت صفر: دیتابیس بدون اشکال در حال کار کردن می باشد

حالت ۱: دیتابیس به علت خطای نوع اول از کار افتاده است.

حالت ۲: دیتابیس به علت خطای نوع دوم از کار افتاده است

ماتریس نرخ گذر به صورت زیر خواهد بود:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0.6 & 1.4 \\ 10 & -10 & 0 \\ 15 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

با حل معادله  $\pi Q = 0$ ، خواهیم داشت:

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) = \left( \frac{150}{173}, \frac{9}{173}, \frac{14}{173} \right)$$

الف) چند درصد از اوقات دیتابیس به علت خرابی نوع دوم، از دسترس خارج است.

جواب:

$$\pi_2 = \frac{14}{173}$$

ب) چند درصد از اوقات دیتابیس، به درستی کار می کند.

جواب:

$$\pi_0 = \frac{150}{173}$$

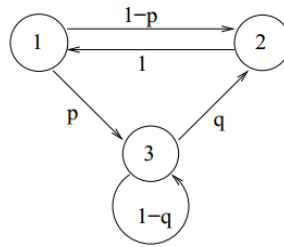
سوال ۶- فرض کنید وارد یک بانک شده اید. اگر  $n$  نفر در صف و جلوتر از شما باشند و یک باجه سرویس دهی موجود باشد (سرویس نمایی با نرخ  $\mu$ )، میانگین زمان انتظار شما، چقدر خواهد بود؟

جواب:

در این حالت باید میانگین زمان سرویس  $n$  مشتری در صف و ۱ مشتری در حال دریافت سرویس را در نظر گرفت.  $n$  مشتری درون صف، همگی دارای سرویسی با میانگین  $\frac{1}{\mu}$  می باشند. مشتری در حال سرویس نیز، با توجه به خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی، زمان سرویسی معادل با سایرین یعنی  $\frac{1}{\mu}$  خواهد داشت. پس میانگین زمان انتظار ما خواهد بود:

$$E(T_{n+1}) = \frac{n+1}{\mu}$$

سوال ۷- زنجیره مارکوف همگن زیر را در نظر بگیرید:



الف) ماتریس حالت گذر را بدست آورید.

جواب:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q \end{pmatrix}$$

ب) تحت چه شرایطی، زنجیره مورد بحث irreducible و aperiodic خواهد بود؟

جواب:

اگر  $p=0$  باشد، حالت ۳ از هر دو حالت ۱ و ۲ غیرقابل دسترس خواهد بود. اگر  $q=0$  باشد، حالت های ۱ و ۲ از حالت ۳ غیرقابل دسترس خواهند بود. در هر دو حالت گفته شد، زنجیره irreducible نخواهد بود.

اگر  $p=1$  و  $q=1$  باشد، آنگاه زنجیره مارکوف پریودیک با دوره ۳ خواهد بود.

در سایر موارد، زنجیره irreducible و aperiodic خواهد بود.

ج) بردار احتمال حالت پایدار را بدست آورید.

جواب:

در حالت تعادل داریم:  $\pi = \pi P$ . بنابراین

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_2 = (1-p)\pi_1 + q\pi_3 \\ \pi_3 = p\pi_1 + (1-q)\pi_3 \end{cases}$$

به همراه معادله  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$  بدست می دهد:

$$\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3] = \left[ \frac{q}{p+2q}, \frac{q}{p+2q}, \frac{p}{p+2q} \right]$$

د) میانگین زمان بازگشت برای حالت ۲ را بدست آورید.

جواب:

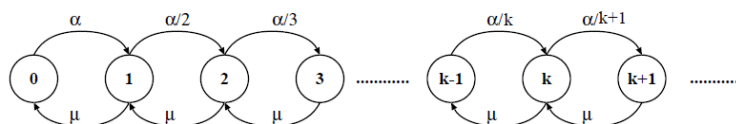
$$E[\text{recurrence time to state } 2] = \frac{1}{\pi_2} = \frac{p}{q} + 2$$

-در یک صف تولد – مرگ با ورودی دلسرد (discouraged arrival) ، ورودی ها با توجه به حالت سیستم k که همان تعداد مشتری در سیستم است به نحو زیر وارد می شوند.

$$\lambda_k = \frac{\alpha}{k+1} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \mu_k = \mu$$

برای این صف توزیع پایدار مشتری در سیستم و راندمان (درصد مشغول بودن سرور) و میانگین را بدست آورید.

جواب :



$$p_0 \alpha = p_1 \mu \rightarrow p_1 = p_0 \frac{\alpha}{\mu}$$

$$p_1 \frac{\alpha}{2} = p_2 \mu \rightarrow p_2 = p_1 \frac{\alpha}{\mu 2} = p_0 \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$p_2 \frac{\alpha}{3} = p_3 \mu \rightarrow p_3 = p_2 \frac{\alpha}{\mu 3} = p_0 \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)$$

⋮

$$p_i = p_0 \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^i \left(\frac{1}{i!}\right) \quad i \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_0 \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^i \left(\frac{1}{i!}\right) = 1$$

$$p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\frac{\alpha}{\mu})^i}{i!} = 1$$

$$p_0 e^{\frac{\alpha}{\mu}} = 1$$

$$p_0 = e^{-\frac{\alpha}{\mu}}$$

$$p_i = e^{-(\frac{\alpha}{\mu})} (\frac{\alpha}{\mu})^i (\frac{1}{i!}) \quad i \geq 0$$

$$\bar{N} = ?$$

$$\bar{T} = ?$$

$$\rho = ? \quad \frac{\lambda}{\mu} = (1 - e^{-\frac{\alpha}{\mu}})$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(k+1)} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{k+1} \cdot \frac{e^{-\frac{\alpha}{\mu}} (\frac{\alpha}{\mu})^k}{k!} \\ &= \alpha e^{-\frac{\alpha}{\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{\alpha}{\mu})^k}{(k+1)!} = \mu e^{-\frac{\alpha}{\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{\alpha}{\mu})^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \mu e^{-\frac{\alpha}{\mu}} (e^{\frac{\alpha}{\mu}} - 1) = \mu (1 - e^{-\frac{\alpha}{\mu}}) \end{aligned}$$

## EXERCISES

1. A tool crib has exponential interarrival and service times and serves a very large group of mechanics. The mean time between arrivals is 4 minutes. It takes 3 minutes on the average for a tool-crib attendant to service a mechanic. The attendant is paid \$10 per hour and the mechanic is paid \$15 per hour. Would it be advisable to have a second tool-crib attendant?

268

F:\drive D\Courses tehran\performance\simulation exam\Banks carson nelson nicol Solution 4th.pdf

- 6.1 The tool crib is modeled by an M/M/c queue ( $\lambda = 1/4, \mu = 1/3, c = 1$  or  $2$ ). Given that attendants are paid \$6 per hour and mechanics are paid \$10 per hour,

$$\text{Mean cost per hour} = \$10c + \$15L$$

assuming that mechanics impose cost on the system while in the queue and in service.

CASE 1: one attendant - M/M/1 ( $c = 1, \rho = \lambda/\mu = .75$ )

$$L = \rho/(1 - \rho) = 3 \text{ mechanics}$$

$$\text{Mean cost per hour} = \$10(1) + \$15(3) = \$55 \text{ per hour.}$$

CASE 2: two attendants - M/M/2 ( $c = 2, \rho = \lambda/c\mu = .375$ )

$$L = c\rho + [(c\rho)^{c+1}P_0] / [c(c!)(1 - \rho)^2] = .8727,$$

where

$$P_0 = \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{c-1} (c\rho)^n / n! \right] + [(c\rho)^c (1/c!)(1/(1 - \rho))] \right\}^{-1} = .4545$$

$$\text{Mean cost per hour} = \$10(2) + \$15(.8727) = \$33.09 \text{ per hour}$$

It would be advisable to have a second attendant because long run costs are reduced by \$21.91 per hour.

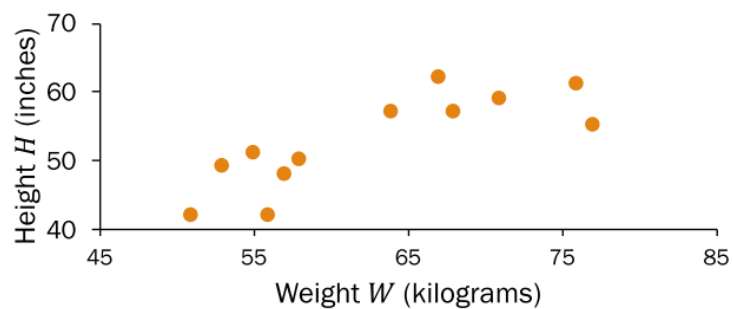
## کوواریانس و همبستگی :

**مثال:** جدول مقابل وزن بر حسب کیلوگرم و قد بر حسب اینچ ۱۲ نفر را نشان میدهد . در مورد کوواریانس این دو متغیر تصادفی بحث کنید.

$$E[W]=62.75 \quad E[H]=52.75 \quad E[WH]=3355.83$$

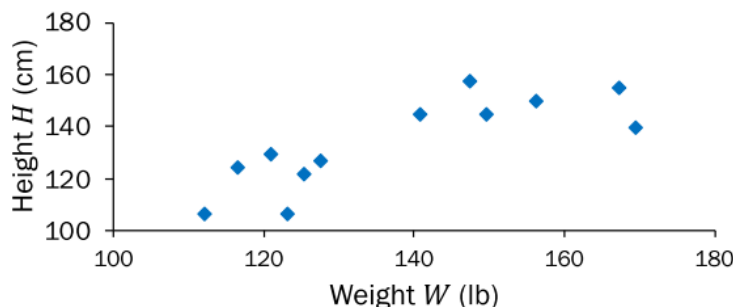
$$\text{Cov}(W,H)=E[WH]-E[W]E[H] =3355.83-(62.75)(52.75)=45.77 \text{ (positive correlation)}$$

| Weight (kg) | Height (in) | W · H |
|-------------|-------------|-------|
| 64          | 57          | 3648  |
| 71          | 59          | 4189  |
| 53          | 49          | 2597  |
| 67          | 62          | 4154  |
| 55          | 51          | 2805  |
| 58          | 50          | 2900  |
| 77          | 55          | 4235  |
| 57          | 48          | 2736  |
| 56          | 42          | 2352  |
| 51          | 42          | 2142  |
| 76          | 61          | 4636  |
| 68          | 57          | 3876  |



اگر وزن بر حسب پوند و قد بر حسب سانتیمتر باشد کوواریانس این دو متغیر تصادفی را بدست آورید . مشاهده می نمایید که همان داده منجر به نتایج متفاوتی میشود (هر اینچ معادل ۲/۵۴ سانتیمتر و هر کیلوگرم معادل ۲/۲ پوند می باشد). این مثال نشان میدهد : برای کوواریانس ، **علامت** کوواریانس گویاتر از **مقدار** کوواریانس می باشد.

$$\text{Cov}(2.2W, 2.54H) = E[2.2W * 2.54H] - E[2.2W]E[2.54H] = 18752.38 - (138.05)(133.99) = 255.06 \text{ (positive correlation)}$$



بنابر این نیازمند مفهومی موسوم به **همبستگی** داریم که وابستگی به واحد داده ها نداشته باشد

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

که در آن

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X),$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y),$$

و همواره:

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

همبستگی ، معیاری برای بیان **رابطه خطی** بین  $X$  و  $Y$  است. سه مورد زیر را در نظر بگیرید.

در دو مورد اول رابطه خطی بین  $X$  و  $Y$  وجود دارد و متغیرها همبسته شدید هستند

$$\rho(X, Y) = 1 \quad \rightarrow Y = aX + b, \quad \text{where} \quad a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \quad \text{همبستگی مثبت}$$

$$\rho(X, Y) = -1 \quad \rightarrow Y = aX + b, \quad \text{where} \quad a = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \quad \text{همبستگی منفی}$$

$$\rho(X, Y) = 0 \quad \text{X و Y ناهمبسته هستند (در واقع رابطه خطی بین X و Y وجود ندارد)}$$

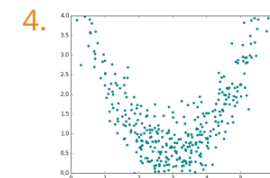
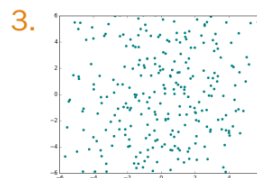
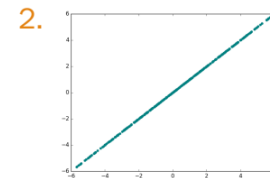
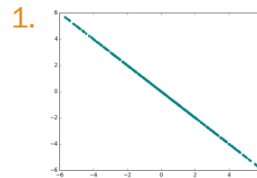
تمرین : ارتباط شکل های ۱ تا ۴ را با روابط A, B, C, D را مشخص نمایید.

A.  $\rho(X, Y) = 1$

B.  $\rho(X, Y) = -1$

C.  $\rho(X, Y) = 0$

D. Other



جواب:

1-B  $Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X + b$

خطی با ضریب زاویه منفی است . به مقدار ضریب زاویه هم توجه کنید و سعی کنید ان را متوجه شوید

2-A  $Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}X + b$

خطی با ضریب زاویه مثبت است . به مقدار ضریب زاویه هم توجه کنید و سعی کنید ان را متوجه شوید

3- C.  $\rho(X, Y) = 0$  (ناهمبسته)

4- C.  $\rho(X, Y) = 0$   $Y = X^2$

همانطور که تاکید شد **همبستگی** " خطی بودن " را اندازه می گیرد و شکل ۴ نشان میدهد با آنکه کوواریانس  $X$  و  $Y$  صفر می باشد . این دو متغیر به طور " غیر خطی " با هم رابطه دارند

**مثال** دیگر از اینکه کوواریانس صفر بیانگر استقلال نیست.

فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  هریک از مقادیر قلمرو خود  $\{-1, 0, 1\}$  را با احتمال  $1/3$  اختیار میکند. متغیر تصادفی  $Y$  را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{if } X = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

کدام گزینه زیر در مورد تابع جرم احتمال توام  $X$  و  $Y$  صحیح است؟ و توزیع های حاشیه ای را بنویسید

A.

|   |   | X   |     |     |
|---|---|-----|-----|-----|
|   |   | -1  | 0   | 1   |
| Y | 0 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
|   | 1 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

B.

|   |   | X   |     |     |
|---|---|-----|-----|-----|
|   |   | -1  | 0   | 1   |
| Y | 0 | 1/3 | 0   | 1/3 |
|   | 1 | 0   | 1/3 | 0   |

C.

|   |   | X   |     |     |
|---|---|-----|-----|-----|
|   |   | -1  | 0   | 1   |
| Y | 0 | 0   | 1/3 | 0   |
|   | 1 | 1/3 | 0   | 1/3 |

جواب : B

|   |   | X   |     |     |     |
|---|---|-----|-----|-----|-----|
|   |   | -1  | 0   | 1   |     |
| Y | 0 | 1/3 | 0   | 1/3 | 2/3 |
|   | 1 | 0   | 1/3 | 0   | 1/3 |
|   |   | 1/3 | 1/3 | 1/3 |     |

Marginal PMF of  $Y$ ,  $p_Y(y)$

Marginal PMF of  $X$ ,  $p_X(x)$

به سوال های زیر پاسخ دهید.

1.  $E[X] \quad E[Y]$
2.  $E[XY]$
3.  $Cov(X, Y)$

۴. آیا  $X$  و  $Y$  مستقل هستند؟

جواب:

1.  $E[X] = 0 \quad E[Y] = \frac{1}{3}$
2.  $E[XY] = 0$
3.  $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$

$XY$  همواره صفر است ، بنابراین

۴. آیا مستقل هستند؟

$$P[Y = 0] = \frac{2}{3} \neq P(Y = 0|X = 0) = 0$$

خیر

## واریانس مجموع متغیرهای تصادفی:

برای دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$  به طور کلی رابطه زیر برقرار است

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) = 0$$

**اثبات:**

$$\begin{aligned}\text{Var}(X + Y) &= \text{Cov}(X + Y, X + Y) & \text{Var}(X) &= \text{Cov}(X, X) \\ &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, Y) & \text{covariance of all pairs} \\ &= \text{Var}(X) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) & \text{Symmetry of covariance + Cov}(X, X) &= \text{Var}(X)\end{aligned}$$

تعمیم فوق به صورت زیر است.

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \text{Cov}(X_i, X_j)$$

**اثبات:**

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &\stackrel{\text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X)}{=} \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{\text{covariance of all pairs}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Cov}(X_i, X_j) & \text{Symmetry of covariance Cov}(X, X) &= \text{Var}(X) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) & \text{Adjust summation bounds}\end{aligned}$$

روابط فوق در صورت استقلال متغیرها چگونه می باشد؟

جدول زیر توزیع احتمال توام ۳ متغیر تصادفی گسسته  $X, Y, Z$  را نشان میدهد.

به سوالات زیر پاسخ دهید؟

|       |            | $X = 1$ | $X = 2$ | $X = 3$ | $X = 4$ | $X = 5$ | $X = 6$ |
|-------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $Z=0$ | $Y = 1$    | .006    | .000    | .000    | .000    | .000    | .000    |
|       | $Y = 2$    | .155    | .069    | .034    | .006    | .023    | .029    |
|       | $Y = 3$    | .092    | .063    | .023    | .006    | .006    | .000    |
|       | $Y = 4$    | .017    | .029    | .011    | .006    | .000    | .000    |
|       | $Y \geq 5$ | .029    | .006    | .011    | .006    | .000    | .000    |
| $Z=1$ | $Y = 1$    | .000    | .000    | .000    | .000    | .000    | .000    |
|       | $Y = 2$    | .126    | .040    | .017    | .017    | .000    | .017    |
|       | $Y = 3$    | .046    | .040    | .006    | .011    | .000    | .006    |
|       | $Y = 4$    | .006    | .006    | .000    | .000    | .000    | .000    |
|       | $Y \geq 5$ | .006    | .000    | .017    | .011    | .000    | .000    |

1-  $P(Y \geq 5, X = 1, Z = 1)$

جواب: جعبه نشان داده شده در جدول (0.006).

2-  $P(Z = z|X = x)$

راهنمایی: توزیع احتمال مربوطه را در قالب جدولی بدست آورید

3-  $P(X = x|Z = z)$

راهنمایی: توزیع احتمال مربوطه را در قالب جدولی بدست آورید

**جواب:** ابتدا باید متغیر تصادفی  $Y$  را به حاشیه بفرستیم و به توزیع  $P(X = x, Z = m)$  دست پیدا کنیم

|       | $X = 1$ | $X = 2$ | $X = 3$ | $X = 4$ | $X = 5$ | $X = 6$ |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $Z=0$ | .299    | .167    | .080    | .023    | .029    | .029    |
| $Z=1$ | .184    | .086    | .040    | .040    | .000    | .023    |

به کمک توزیع فوق میتوان به سوال هایی نظیر  $P(X = 1, Z = 1)$  پاسخ داد که مقدار آن مطابق جدول 0.184 است

سپس به کمک روابط زیر توزیع های  $P(Z = z|X = x)$  و  $P(X = x|Z = z)$  را بدست آورد

$$P(Z = z|X = x) = \frac{P(Z=z, X=x)}{P(X=x)}$$

$$P(Z = 0|X = 1) = \frac{P(Z = 0, X = 1)}{P(X = 1)} == \frac{.299}{.299 + .184} = .619$$

$$P(Z = 1|X = 1) = \frac{P(Z = 1, X = 1)}{P(X = 1)} == \frac{.184}{.299 + .184} = .381$$

.....

|     | X = 1 | X = 2 | X = 3 | X = 4 | X = 5 | X = 6 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Z=0 | .619  | .659  | .667  | .364  | 1.000 | .556  |
| Z=1 | .381  | .341  | .333  | .636  | .000  | .444  |

$$P(X = x|Z = z) = \frac{P(X = x, Z = z)}{P(Z = z)}$$

$$P(X = 1|Z = 0) = \frac{P(X = 1, Z = 0)}{P(Z = 0)} == \frac{.299}{.299 + .167 + .080 + .023 + .029 + .029} = \frac{.299}{.627} = .477$$

$$P(X = 1|Z = 1) = \frac{P(X = 1, Z = 1)}{P(Z = 1)} == \frac{.184}{.184 + .086 + .040 + .040 + .000 + .023} = \frac{.184}{.373} = .493$$

.....

|     | X = 1 | X = 2 | X = 3 | X = 4 | X = 5 | X = 6 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Z=0 | .477  | .266  | .128  | .037  | .046  | .046  |
| Z=1 | .493  | .231  | .108  | .108  | .000  | .062  |